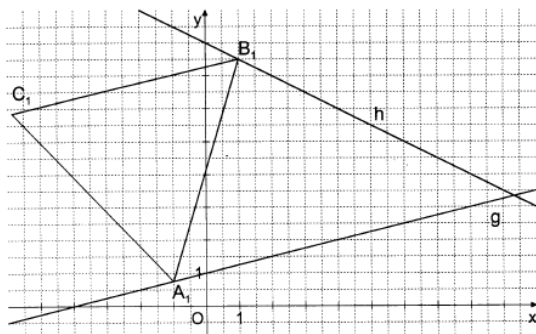


## Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe P3

### Aufgabe P3.

Punkte  $A_n \left( x \mid \frac{1}{4}x + 1 \right)$  auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = \frac{1}{4}x + 1$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ )

und Punkte  $B_n$  auf der Geraden  $h$  mit der Gleichung  $y = -\frac{1}{2}x + 8$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) bilden zusammen mit Punkten  $C_n$  gleichseitige Dreiecke  $A_n B_n C_n$ . Die Abszisse der Punkte  $B_n$  ist stets um zwei größer als die Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ .



#### Aufgabe P3.1 (1 Punkt)

Ergänzen Sie die Zeichnung zu 3.0 um das Dreieck  $A_2 B_2 C_2$  für  $x = 4$ .

#### Aufgabe P3.2 (4 Punkte)

Die Punkte  $B_n$  können auf die Punkte  $C_n$  abgebildet werden.

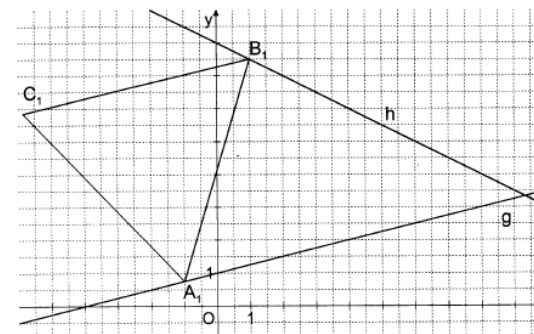
Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte  $C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ .

## Lösung

### Aufgabe P3.

Punkte  $A_n \left( x \mid \frac{1}{4}x + 1 \right)$  auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = \frac{1}{4}x + 1$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ )

und Punkte  $B_n$  auf der Geraden  $h$  mit der Gleichung  $y = -\frac{1}{2}x + 8$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) bilden zusammen mit Punkten  $C_n$  gleichseitige Dreiecke  $A_n B_n C_n$ . Die Abszisse der Punkte  $B_n$  ist stets um zwei größer als die Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ .



#### Aufgabe P3.1 (1 Punkte)

Ergänzen Sie die Zeichnung zu 3.0 um das Dreieck  $A_2 B_2 C_2$  für  $x = 4$ .

#### Lösung zu Aufgabe P3.1

##### Skizze

Gegeben:

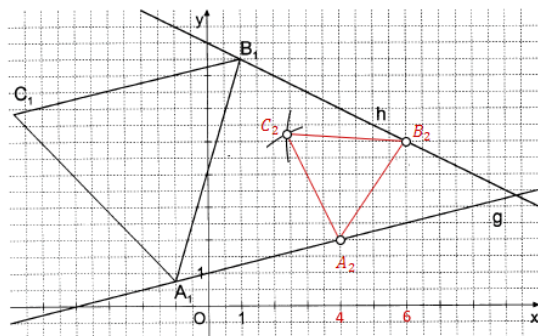
$$A \left( x \mid \frac{1}{4}x + 1 \right), \quad x = 4$$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Durch Einsetzen von  $x = 4$  ergibt sich  $A_2(4|2)$ .

Der x-Wert (Abszisse) von  $B_2$  ist um 2 größer als 4, also 6. Nun wird bei  $x = 6$  der Punkt  $B_2$  auf der Geraden  $h$  eingezeichnet.

Nach Verbinden der Strecke  $[A_2 B_2]$ , zeichnet man jeweils um  $A_2$  und  $B_2$  mit dem Zirkel einen Bogen mit dem Radius  $\overline{A_2 B_2}$ . Der Schnittpunkt der Bögen ist  $C_2$ .



### Aufgabe P3.2 (4 Punkte)

Die Punkte  $B_n$  können auf die Punkte  $C_n$  abgebildet werden.

Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte  $C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ .

### Lösung zu Aufgabe P3.2

#### Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben:  $A_n \left( x \mid \frac{1}{4}x + 1 \right)$

Die Punkte  $C_n$  entstehen durch Drehung der Punkte  $B_n$  um  $60^\circ$  um das Drehzentrum  $A_n$ .

Vor Anwendung der Drehung müssen die Koordinaten der Punkte  $B_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  berechnet werden.

Erläuterung: *Koordinaten von Punkten in Abhängigkeit von der Abszisse anderer Punkte*

Da die Abszisse der Punkte  $B_n$  stets um zwei größer als die Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  ist, ergibt sich für die x-Koordinate der Punkte  $B_n$   $x + 2$ , also  $B_n(x + 2|?)$ .

Die fehlende y-Koordinate erhält man, indem  $x + 2$  in die Gleichung der Geraden  $h$  eingesetzt wird.

$$B_n \left( x + 2 \mid -\frac{1}{2} \cdot (x + 2) + 8 \right)$$

$$\Rightarrow B_n \left( x + 2 \mid -\frac{1}{2}x + 7 \right)$$

#### Drehung

Jetzt wird der Vektor  $\overrightarrow{A_n B_n}$  berechnet, der anschließend um  $60^\circ$  gedreht wird.

$$\overrightarrow{A_n B_n} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -\frac{1}{2}x + 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{4}x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Drehmatrix*

Ist  $\alpha$  der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende

Drehmatrix:  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

Hier wird um das Drehzentrum  $A_n$  gedreht, welches dann anschließend noch aufaddiert werden muss.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4}x + 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}x + 6\right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}x + 6\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65x - 4,2 \\ -0,375x + 4,73 \end{pmatrix}$$

Aufaddieren des Drehzentrums  $A_n$ :

$$\vec{C_n} = \begin{pmatrix} 0,65x - 4,2 \\ -0,375x + 4,73 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0,25x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,65x - 4,2 \\ -0,125x + 5,73 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_n(1,65x - 4,2 | -0,125x + 5,73)$$