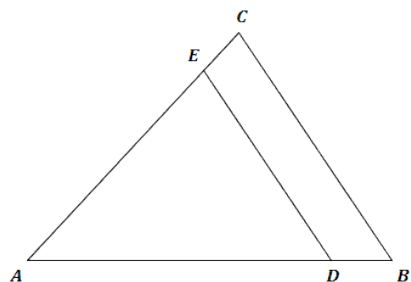


Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik II Aufgabe A1

Aufgabe A1. (5 Punkte)

Die nebenstehende Skizze zeigt den Plan eines dreieckigen Grundstücks ABC . Zum Bau einer neuen Straße muss ein Teil des Grundstücks abgetreten werden. Dabei verkürzen sich die Seiten $[AB]$ und $[AC]$ jeweils um ein Sechstel ihrer ursprünglichen Länge auf die Seiten $[AD]$ und $[AE]$.

Es gilt: $\overline{AB} = 60$ m; $\overline{BC} = 45$ m; $\overline{AC} = 51$ m.



Berechnen Sie den Inhalt A_{DBCE} der abgetretenen Fläche und geben Sie an, um wie viel Prozent sich das Grundstück verkleinert hat.

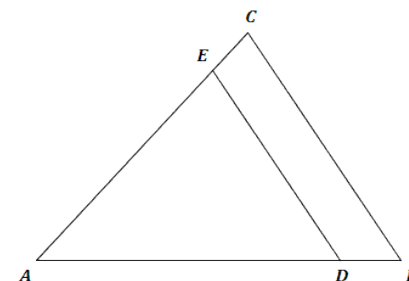
[Teilergebnis: $\angle BAC = 46,97^\circ$]

Lösung

Aufgabe A1. (5 Punkte)

Die nebenstehende Skizze zeigt den Plan eines dreieckigen Grundstücks ABC . Zum Bau einer neuen Straße muss ein Teil des Grundstücks abgetreten werden. Dabei verkürzen sich die Seiten $[AB]$ und $[AC]$ jeweils um ein Sechstel ihrer ursprünglichen Länge auf die Seiten $[AD]$ und $[AE]$.

Es gilt: $\overline{AB} = 60$ m; $\overline{BC} = 45$ m; $\overline{AC} = 51$ m.

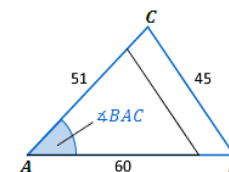


Berechnen Sie den Inhalt A_{DBCE} der abgetretenen Fläche und geben Sie an, um wie viel Prozent sich das Grundstück verkleinert hat.

[Teilergebnis: $\angle BAC = 46,97^\circ$]

Lösung zu Aufgabe A1.

Flächeninhalt eines Dreiecks

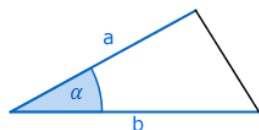


Alle drei Seitenlängen des ursprünglichen Grundstücks ABC sind gegeben:

$$\overline{AB} = 60 \text{ m}; \overline{BC} = 45 \text{ m}; \overline{AC} = 51 \text{ m}$$

Somit lässt sich der Flächeninhalt des Dreiecks ABC berechnen.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

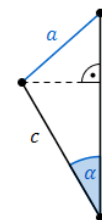
$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \angle BAC$$

Winkel bestimmen

Das fehlende Maß des Winkels $\angle BAC$ wird mit Hilfe des Kosinussatzes berechnet.

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Es gilt:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \angle BAC$$

Umstellen:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \angle BAC \quad | \quad + 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \angle BAC - \overline{BC}^2$$

$$2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \angle BAC = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 \quad | \quad : (2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC})$$

$$\Rightarrow \cos \angle BAC = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Werte $\overline{AB} = 60 \text{ m}$, $\overline{BC} = 45 \text{ m}$ und $\overline{AC} = 51 \text{ m}$ werden in die Gleichung eingesetzt.

$$\cos \angle BAC = \frac{60^2 + 51^2 - 45^2}{2 \cdot 60 \cdot 51}$$

$$\angle BAC = \cos^{-1} \left(\frac{60^2 + 51^2 - 45^2}{2 \cdot 60 \cdot 51} \right)$$

$$\angle BAC \approx 46,97^\circ$$

Flächeninhalt eines Dreiecks

Mit dem berechneten Winkel $\angle BAC \approx 46,97^\circ$ ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC :

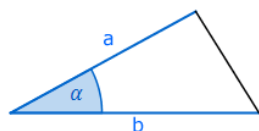
$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \angle BAC$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 51 \cdot \sin 46,97^\circ$$

$$A_{\triangle ABC} \approx 1118,42 \text{ m}^2$$

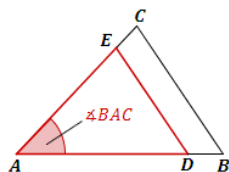
Nun wird auf die gleiche Art der Flächeninhalt des Dreiecks ADE berechnet.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$



$$A_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \sin \angle BAC$$

$$A_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \sin 46,97^\circ$$

$[AD]$ und $[AE]$ entstehen, indem man $[AB]$ und $[AC]$ jeweils um $\frac{1}{6}$ ihrer Länge verkürzt.

Erläuterung: *Ansatz*

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \text{ von } \overline{AB} &\hat{=} \frac{1}{6} \cdot \overline{AB} \\ \frac{1}{6} \text{ von } \overline{AC} &\hat{=} \frac{1}{6} \cdot \overline{AC} \end{aligned}$$

$$\overline{AD} = \overline{AB} - \frac{1}{6} \cdot \overline{AB} = \frac{5}{6} \cdot \overline{AB} = \frac{5}{6} \cdot 60 = 50 \text{ m}$$

$$\overline{AE} = \overline{AC} - \frac{1}{6} \cdot \overline{AC} = \frac{5}{6} \cdot \overline{AC} = \frac{5}{6} \cdot 51 = 42,5 \text{ m}$$

Mit den berechneten Seitenlängen $\overline{AD} = 50 \text{ m}$ und $\overline{AE} = 42,5 \text{ m}$ ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks ADE :

$$A_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \sin 46,97^\circ$$

$$A_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 42,5 \cdot \sin 46,97^\circ$$

$$A_{\triangle ADE} \approx 776,68 \text{ m}^2$$

Verhältnis von Teilflächen

Der gesuchte Flächeninhalt des Vierecks $DBCE$ ist die Differenz der beiden berechneten Dreiecksflächen:

$$A_{DBCE} = A_{\triangle ABC} - A_{\triangle ADE}$$

$$A_{DBCE} = 1118,42 - 776,68$$

$$A_{DBCE} = 341,74 \text{ m}^2$$

Jetzt lässt sich der prozentuale Anteil der abgetretenen Fläche A_{DBCE} am ursprünglichen Grundstück A_{ABC} berechnen.

Erläuterung: *Dreisatz*

$$1118,42 \hat{=} 100\%$$

$$341,74 \hat{=} x\%$$

$$\frac{341,74}{1118,42} = \frac{x}{100}$$

$$x = \frac{341,74}{1118,42} \cdot 100$$

$$\frac{341,74}{1118,42} \approx 0,3056 = 30,56\%$$

Antwort: Das Grundstück hat sich um 30,56% verkleinert.