

Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik II Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Die Gerade g hat die Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 1$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Punkte $P(0|-1)$ und $Q(5,5|1,75)$ sind die Schnittpunkte der Geraden g mit einer nach unten geöffneten Normalparabel p .

Aufgabe A1.1 (5 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Parabel p sowie die Koordinaten des Scheitelpunktes S .

Zeichnen Sie sodann die Parabel p und die Gerade g in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-6 \leq x \leq 7$; $-3 \leq y \leq 11$

[Teilergebnis: $p: y = -x^2 + 6x - 1$]

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n \left(x \mid \frac{1}{2}x - 1\right)$ auf der Geraden g und Punkte $B_n (x \mid -x^2 + 6x - 1)$ auf der Parabel p mit $0 < x < 5,5$ ($x \in \mathbb{R}$) haben jeweils dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n B_n C_n$. Die Winkel $C_n B_n A_n$ besitzen stets das Maß $\beta = 120^\circ$ und für die Seiten $[B_n C_n]$ gilt: $\overline{B_n C_n} = 6$ LE.

Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ für $x = 0,5$ und $A_2 B_2 C_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe A1.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für alle Vektoren $\overrightarrow{B_n C_n}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet gilt: $\overrightarrow{B_n C_n} = \begin{pmatrix} -5,20 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie sodann die Koordinaten des Punktes C_3 des Dreiecks $A_3 B_3 C_3$ für $x = 1,5$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Aufgabe A1.4 (4 Punkte)

Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n B_n C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n .

Überprüfen Sie sodann, ob es unter den Dreiecken $A_n B_n C_n$ ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE gibt.

[Teilergebnis: $A(x) = 2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x)$ FE]

Aufgabe A1.5 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken $A_n B_n C_n$ gibt es die Dreiecke $A_4 B_4 C_4$ und $A_5 B_5 C_5$, in denen die Winkel $A_4 C_4 B_4$ und $A_5 C_5 B_5$ jeweils das Maß $\gamma = 25^\circ$ haben.

Berechnen Sie die Länge der Seiten $[A_4 B_4]$ bzw. $[A_5 B_5]$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung

Aufgabe A1.

Die Gerade g hat die Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 1$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Punkte $P(0|-1)$ und $Q(5,5|1,75)$ sind die Schnittpunkte der Geraden g mit einer nach unten geöffneten Normalparabel p .

Aufgabe A1.1 (5 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Parabel p sowie die Koordinaten des Scheitelpunktes S .

Zeichnen Sie sodann die Parabel p und die Gerade g in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-6 \leq x \leq 7$; $-3 \leq y \leq 11$

[Teilergebnis: $p: y = -x^2 + 6x - 1$]

Lösung zu Aufgabe A1.1

Funktionsgleichung ermitteln

Gegeben:

Gerade $g: y = \frac{1}{2}x - 1$

$P(0|-1)$ und $Q(5,5|1,75)$ sind die Schnittpunkte der Geraden g mit einer nach unten geöffneten Normalparabel p .

Vorüberlegung: Welche Form hat eine nach unten geöffnete Normalparabel?

Erläuterung: *Parabelgleichung bestimmen*

Eine nach unten geöffnete Parabel hat die Form $y = -ax^2 + bx + c$.

Bei einer Normalparabel ist zusätzlich $a = 1$.

$$\Rightarrow y = -x^2 + bx + c$$

$$y = -x^2 + bx + c$$

Die Punkte P und Q werden in die Parabelgleichung eingesetzt und man erhält ein Gleichungssystem:

$$(I) -1 = 0^2 + b \cdot 0 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = -1$$

$$(II) 1,75 = -5,5^2 + b \cdot 5,5 + c$$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Einsetzverfahren*

$c = -1$ wird in Gleichung (II) eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach b aufgelöst.

$$(II) 1,75 = -5,5^2 + b \cdot 5,5 - 1 \quad | \quad +5,5^2 + 1$$

$$(II) 33 = 5,5b \quad | \quad : 5,5$$

$$\Rightarrow b = 6$$

$$\Rightarrow p: y = -x^2 + 6x - 1$$

Bestimmung des Scheitelpunktes:

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Eine quadratische Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$ besitzt folgenden Scheitelpunkt S :

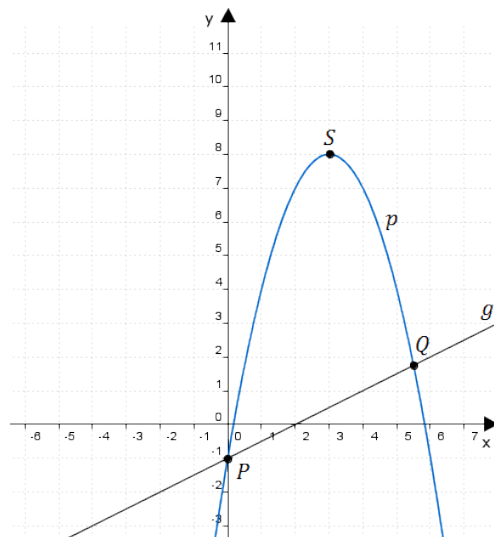
$$S \left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right) \quad (\text{siehe Formelsammlung})$$

$$S \left(-\frac{6}{2 \cdot (-1)} \mid -1 - \frac{6^2}{4 \cdot (-1)} \right)$$

$$\Rightarrow S(3|8)$$

Skizze

Parabel g (Wertetabelle oder Schablone hilfreich) und Gerade g einzeichnen:

**Aufgabe A1.2** (2 Punkte)

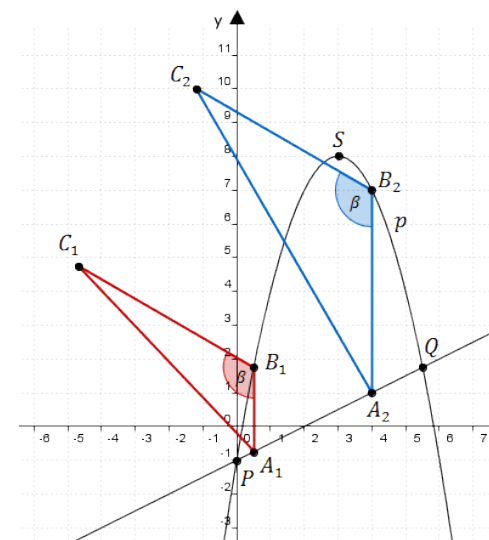
Punkte $A_n \left(x \mid \frac{1}{2}x - 1 \right)$ auf der Geraden g und Punkte $B_n (x \mid -x^2 + 6x - 1)$ auf der Parabel p mit $0 < x < 5,5$ ($x \in \mathbb{R}$) haben jeweils dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n B_n C_n$. Die Winkel $C_n B_n A_n$ besitzen stets das Maß $\beta = 120^\circ$ und für die Seiten $[B_n C_n]$ gilt: $\overline{B_n C_n} = 6$ LE. Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ für $x = 0,5$ und $A_2 B_2 C_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe A1.2**Skizze**

Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ einzeichnen:

Erläuterung: Einzeichnen

- 1) Punkte A_1 auf g und B_1 auf p mit dem x -Wert $0,5$ einzeichnen.
 - 2) Punkte A_1 und B_1 verbinden
 - 3) Den Schenkel $[B_1 C_1]$ im Winkel von $\angle C_1 B_1 A_1 = 120^\circ$ nach links oben mit der Länge 6 cm einzeichnen
 - 4) Punkte zum Dreieck verbinden
- Dreieck $A_2 B_2 C_2$ analog.

**Aufgabe A1.3** (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für alle Vektoren $\overrightarrow{B_n C_n}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet gilt: $\overrightarrow{B_n C_n} = \begin{pmatrix} -5,20 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie sodann die Koordinaten des Punktes C_3 des Dreiecks $A_3 B_3 C_3$ für $x = 1,5$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe A1.3

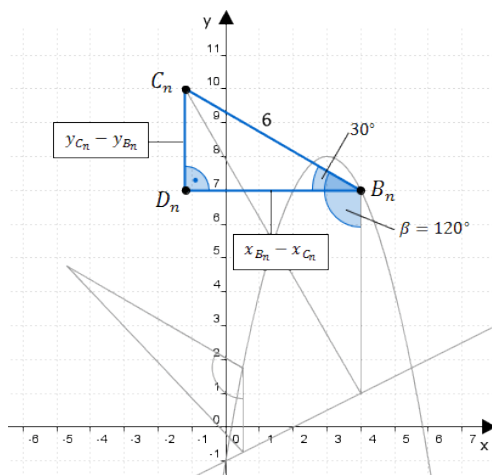
Vektor bestimmen

Gegeben: $\overline{B_n C_n} = 6 \text{ LE}$

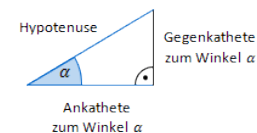
Zu zeigen: $\overrightarrow{B_n C_n} = \begin{pmatrix} -5,20 \\ 3 \end{pmatrix}$

Es gilt allgemein: $\overrightarrow{B_n C_n} = \begin{pmatrix} x_{C_n} - x_{B_n} \\ y_{C_n} - y_{B_n} \end{pmatrix}$

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck $B_n C_n D_n$ in der folgenden Hilfsskizze:



Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

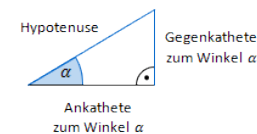
Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos 30^\circ = \frac{x_{B_n} - x_{C_n}}{6} \quad | \cdot 6$$

$$x_{B_n} - x_{C_n} = 6 \cos 30^\circ \quad | \cdot (-1)$$

$$x_{C_n} - x_{B_n} = -6 \cos 30^\circ = -5,20$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin 30^\circ = \frac{y_{C_n} - y_{B_n}}{6} \quad | \cdot 6$$

$$y_{C_n} - y_{B_n} = 6 \sin 30^\circ = 3$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{B_n C_n} = \begin{pmatrix} x_{C_n} - x_{B_n} \\ y_{C_n} - y_{B_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5, 20 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe A1.4 (4 Punkte)

Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n B_n C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n .

Überprüfen Sie sodann, ob es unter den Dreiecken $A_n B_n C_n$ ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE gibt.

[Teilergebnis: $A(x) = 2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x)$ FE]

Lösung zu Aufgabe A1.4**Flächeninhalt eines Dreiecks**

Gegeben:

$$\beta = 120^\circ, \quad \overline{B_n C_n} = 6 \text{ LE}$$

$$A_n \left(x \mid \frac{1}{2}x - 1 \right), \quad B_n \left(x \mid -x^2 + 6x - 1 \right)$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot \overline{B_n C_n} \cdot \sin \beta$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ$$

$$A = 2,60 \cdot \overline{A_n B_n}$$

Nun muss noch $\overline{A_n B_n}$ berechnet werden.

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Da die Punkte A_n und B_n die gleiche Abszisse (x -Wert) haben und die Punkte B_n oberhalb den Punkten A_n liegen, gilt:

$$\overline{A_n B_n} = y_{B_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n B_n} = y_{B_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n B_n} = -x^2 + 6x - 1 - \left(\frac{1}{2}x - 1 \right)$$

$$\overline{A_n B_n} = -x^2 + 6x - 1 - \frac{1}{2}x + 1$$

$$\overline{A_n B_n} = -x^2 + 5,5x$$

$$\Rightarrow A(x) = 2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x) \text{ FE}$$

Überprüfen, ob es unter den Dreiecken $A_n B_n C_n$ ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE gibt:

Erläuterung: *Einsetzen*

$A = 22$ wird in die Gleichung $A = 2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x)$ eingesetzt.

Anschließend wird überprüft, ob sich die Gleichung nach x auflösen lässt.

$$2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x) = 22$$

$$-2,60x^2 + 2,60 \cdot 5,5x = 22 \quad | \quad -22$$

$$-2,60x^2 + 2,60 \cdot 5,5x - 22 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Es reicht, nur die Diskriminante $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ zu überprüfen.

Falls die Diskriminante negativ ist, existiert keine Lösung.

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$D = (2, 60 \cdot 5, 5)^2 - 4 \cdot (-2, 60) \cdot (-22) = -24,31 < 0$$

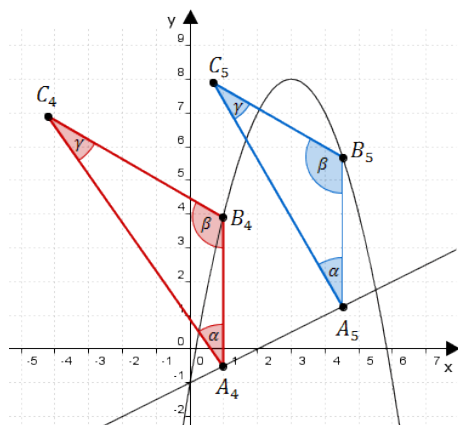
⇒ Es gibt kein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE.

Aufgabe A1.5 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken $A_n B_n C_n$ gibt es die Dreiecke $A_4 B_4 C_4$ und $A_5 B_5 C_5$, in denen die Winkel $A_4 C_4 B_4$ und $A_5 C_5 B_5$ jeweils das Maß $\gamma = 25^\circ$ haben. Berechnen Sie die Länge der Seiten $[A_4 B_4]$ bzw. $[A_5 B_5]$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe A1.5

Länge einer Strecke



Gegeben: $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 25^\circ$ $\overline{B_n C_n} = 6$ LE

Jetzt ist auch der Winkel α berechenbar.

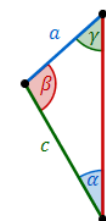
Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

$$\alpha = 180^\circ - 120^\circ - 25^\circ = 35^\circ$$

Im Dreieck $A_4 B_4 C_4$ bzw. $A_5 B_5 C_5$ kann der Sinussatz angewendet werden.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\frac{\overline{A_n B_n}}{\sin \gamma} = \frac{\overline{B_n C_n}}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\overline{A_n B_n}}{\sin 25^\circ} = \frac{6}{\sin 35^\circ} \quad | \cdot \sin 25^\circ$$

$$\overline{A_n B_n} = \frac{6 \cdot \sin 25^\circ}{\sin 35^\circ}$$

$$\Rightarrow \overline{A_4 B_4} = \overline{A_5 B_5} = 4,42 \text{ LE}$$