

Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Die Strecke $[AD]$ mit $A(5|2,5)$ und $D(-1|-5,5)$ ist die gemeinsame Grundseite von gleichschenkligen Trapezen AB_nC_nD mit den Schenkeln $[AB_n]$ und $[DC_n]$. Die Eckpunkte $B_n\left(x|\frac{1}{2}x+5\right)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 5$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dabei gilt: $x \in]-4; 11[$

Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g , die Trapeze AB_1C_1D für $x = -0,5$ und AB_2C_2D für $x = 3$ und die Symmetrieachse s der Trapeze in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-7 \leq x \leq 6$; $-7 \leq y \leq 8$

Aufgabe A2.2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Ergebnis: $C_n(-0,20x - 4,80|-1,10x - 1,40)$]

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Ermitteln Sie die Gleichung des Trägergraphen t der Punkte C_n .

Aufgabe A2.4 (2 Punkte)

Man erhält nur für $x \in]-4; 11[$ Trapeze AB_nC_nD .
Bestätigen Sie durch Rechnung die obere Intervallgrenze.

Aufgabe A2.5 (2 Punkte)

Unter den Trapezen AB_nC_nD gibt es das Trapez AB_3C_3D , dessen Schenkel $[DC_3]$ parallel zur x -Achse liegt.
Bestimmen Sie durch Rechnung die x -Koordinate des Punktes C_3 . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Aufgabe A2.6 (4 Punkte)

Konstruieren Sie in das Koordinatensystem zu 2.1 das Trapez AB_0C_0D , dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.
Berechnen Sie sodann die x -Koordinate des Punktes B_0 des Trapezes AB_0C_0D . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung

Aufgabe A2.

Die Strecke $[AD]$ mit $A(5|2,5)$ und $D(-1|-5,5)$ ist die gemeinsame Grundseite von gleichschenkligen Trapezen AB_nC_nD mit den Schenkeln $[AB_n]$ und $[DC_n]$. Die Eckpunkte $B_n\left(x|\frac{1}{2}x+5\right)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 5$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dabei gilt: $x \in]-4; 11[$

Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g , die Trapeze AB_1C_1D für $x = -0,5$ und AB_2C_2D für $x = 3$ und die Symmetrieachse s der Trapeze in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-7 \leq x \leq 6$; $-7 \leq y \leq 8$

Lösung zu Aufgabe A2.1

Skizze

Gegeben:

$$A(5|2,5) \text{ und } D(-1|-5,5)$$

$$B_n(x|\frac{1}{2}x+5)$$

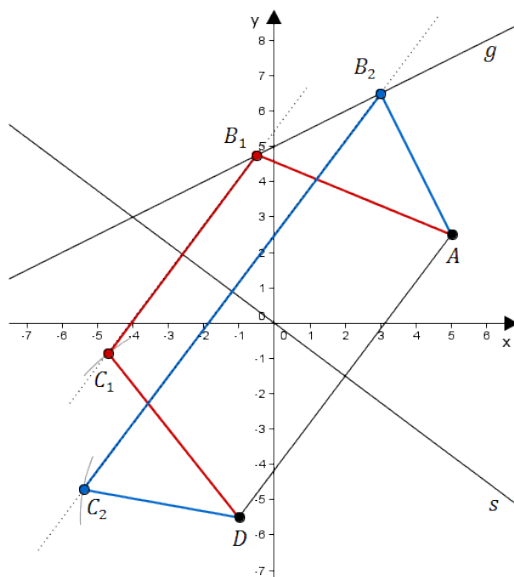
$$\text{Gerade } g : y = \frac{1}{2}x + 5$$

Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Gerade g einzeichnen
- 2) Punkte A und D einzeichnen
- 3) Punkt B_1 mit x -Wert $-0,5$ auf der Geraden g einzeichnen
- 4) Parallele zur Strecke $[AD]$ durch den Punkt B_1 einzeichnen
- 5) Bogen mit Radius $r = \overline{AB_1}$ um den Punkt D einzeichnen
- 6) Dieser Bogen schneidet die Parallele von 4) im Punkt C_1
- 7) Die Punkte werden zum Trapez AB_1C_1D verbunden.

Trapez AB_2C_2D analog.

Die Symmetrieachse s der Trapeze ist die Mittelsenkrechte der Strecke AD .



Aufgabe A2.2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
[Ergebnis: $C_n(-0,20x - 4,80) - 1,10x - 1,40$]

Lösung zu Aufgabe A2.2

Spiegelung an einer Ursprungsgeraden

Gegeben: $A(5|2,5)$, $D(-1|-5,5)$, $B_n\left(x|\frac{1}{2}x + 5\right)$

Die Punkte C_n entstehen durch Spiegelung der Punkte D_n an der Symmetrieachse s .

Um die Spiegelungsmatrix anzuwenden, muss jedoch zuerst gezeigt werden, ob die Symmetrieachse s eine Ursprungsgerade ist.

Erläuterung: *Ursprungsgerade*

Eine Ursprungsgerade hat eine Gleichung der Form: $y = m \cdot x$

Es gilt: $s \perp [AD]$

Erläuterung: *Senkrechte Geraden*

Stehen zwei Geraden g und h senkrecht aufeinander, so ergibt das Produkt der beiden Steigungen -1 :

$$m_g \cdot m_h = -1$$

$$m_s \cdot m_{AD} = -1$$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Die Steigung m einer Geraden AB durch zwei Punkte $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{-5,5 - 2,5}{-1 - 5} = \frac{4}{3}$$

$$m_s \cdot \frac{4}{3} = -1 \quad | \quad : \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow m_s = -\frac{3}{4}$$

Sei M der Mittelpunkt der Strecke $[AD]$, der auch auf der Geraden s liegt.

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt M einer Strecke $[AB]$ mit $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ ist gegeben durch:

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \mid \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$M \left(\frac{5-1}{2} \mid \frac{2+5-5}{2} \right) \iff M(2 \mid -1,5)$$

Erläuterung: *Geradengleichung*

Mit dem Punkt $M(2 \mid -1,5)$ und der Steigung $m_s = -\frac{3}{4}$ kann mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Form $y = m_s \cdot (x - x_M) + y_M$ die Gleichung für s berechnet werden.

$$y = m_s \cdot (x - x_M) + y_M$$

$$y = -\frac{3}{4} \cdot (x - 2) - 1,5$$

$$\Rightarrow s: y = -\frac{3}{4}x$$

$\Rightarrow$ Die Symmetrieachse s ist eine Ursprungsgerade.

Erläuterung: *Spiegelung*

Ist α der Winkel, den die Spiegelungsgerade mit der x-Achse einschließt, so lautet die entsprechende Spiegelungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Nun muss noch α berechnet werden.

Die Gerade s schließt mit der x -Achse den Winkel α ein.

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Der Winkel α , den eine Gerade $g: y = mx + t$ mit der x -Achse einschließt, wird mit folgender Gleichung berechnet:

$$m = \tan \alpha$$

$$\text{Es gilt: } -\frac{3}{4} = \tan \alpha \quad | \quad \tan^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = -36,87^\circ \quad | \quad \cdot 2$$

$$\Rightarrow 2\alpha = -73,74^\circ$$

Spiegelung der Punkte B_n an der Geraden s :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-73,74^\circ) & \sin(-73,74^\circ) \\ \sin(-73,74^\circ) & -\cos(-73,74^\circ) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Kosinus eines negativen Winkels, Sinus eines negativen Winkels*

$$\text{Sinus eines negativen Winkels: } \sin(-x) = -\sin x$$

$$\text{Cosinus eines negativen Winkels: } \cos(-x) = \cos x$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 73,74^\circ & -\sin 73,74^\circ \\ -\sin 73,74^\circ & -\cos 73,74^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,28 & -0,96 \\ -0,96 & -0,28 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$x' = 0,28x - 0,96 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 5\right) = -0,2x - 4,8$$

$$y' = -0,96x - 0,28 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 5\right) = -1,1x - 1,4$$

$$\Rightarrow C_n(-0,2x - 4,8 | -1,1x - 1,4)$$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Ermitteln Sie die Gleichung des Trägergraphen t der Punkte C_n .

Lösung zu Aufgabe A2.3**Trägergraphen / Ortskurve bestimmen**

Gegeben aus Teilaufgabe 2.2: $C_n(-0,20x - 4,80 | -1,10x - 1,40)$

Gesucht: Trägergraph $t : y = ?$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die x -Koordinate $x^* = -0,20x - 4,80$ von C_n wird nach x aufgelöst.

Anschließend wird der Term in die y -Koordinate von C_n eingesetzt.

$$x' = -0,20x - 4,80 \quad | \quad +4,80$$

$$x' + 4,80 = -0,20x \quad | \quad : (-0,20)$$

$$\frac{x' + 4,80}{-0,20} = x$$

$$x = -5x' - 24$$

$$y' = -1,10x - 1,40$$

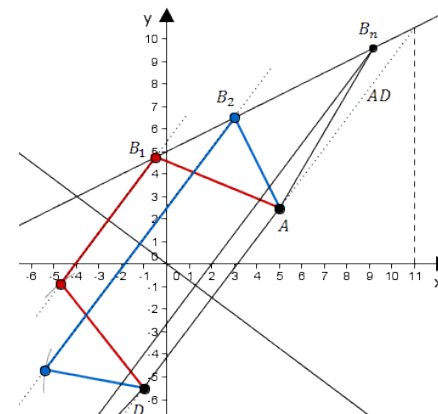
$$y' = -1,10 \cdot (-5x' - 24) - 1,40 = 5,5x' + 25$$

$$\Rightarrow t : y = 5,5x + 25$$

Aufgabe A2.4 (2 Punkte)

Man erhält nur für $x \in]-4; 11[$ Trapeze AB_nC_nD .

Bestätigen Sie durch Rechnung die obere Intervallgrenze.

Lösung zu Aufgabe A2.4**Schnitt zweier Geraden**

Gegeben:

$$A(5|2,5), \quad \text{Punkte } B_n \text{ liegen auf } g : y = \frac{1}{2}x + 5$$

$$m_{AD} = \frac{4}{3} \quad (\text{aus Teilaufgabe 2.2})$$

Wandert man in x -Richtung nach rechts, so können dann keine Trapeze mehr gebildet werden, wenn die Punkte B_n auf der Geraden AD liegen.

Erläuterung: *Geradengleichung*

Mit dem Punkt $A(5|2,5)$ und der Steigung $m_{AD} = \frac{4}{3}$ kann mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Form $y = m_{AD} \cdot (x - x_A) + y_A$ die Gleichung für die Gerade AD bestimmt werden.

$$\text{Gerade } AD: y = m_{AD} \cdot (x - x_A) + y_A$$

$$\text{Gerade } AD: y = \frac{4}{3} \cdot (x - 5) + 2,5 = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3} + 2,5 = \frac{4}{3}x - \frac{25}{6}$$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Die Geradengleichungen für die Gerade g und die Gerade AD werden gleichgesetzt.

$$\frac{4}{3}x - \frac{25}{6} = \frac{1}{2}x + 5 \quad | \quad -\frac{1}{2}x + \frac{25}{6}$$

$$\frac{5}{6}x = \frac{55}{6} \quad | \quad : \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow x = 11 \quad (\text{obere Intervallgrenze})$$

Aufgabe A2.5 (2 Punkte)

Unter den Trapezen AB_nC_nD gibt es das Trapez AB_3C_3D , dessen Schenkel $[DC_3]$ parallel zur x -Achse liegt.

Bestimmen Sie durch Rechnung die x -Koordinate des Punktes C_3 . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung zu Aufgabe A2.5

Koordinaten von Punkten ermitteln

$$\text{Gegeben: } D(-1 | -5,5), \quad C_n(-0,20x - 4,80 | -1,10x - 1,40)$$

Der Schenkel $[DC_3]$ ist parallel zur x -Achse, wenn die y -Werte der Punkte C_3 und D gleich groß sind.

$$y_{C_n} = y_D$$

$$-1,1x - 1,4 = -5,5 \quad | \quad +1,4$$

$$-1,1x = -4,1 \quad | \quad : (-1,1)$$

$$x = \frac{4,1}{1,1}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$$x = \frac{4,1}{1,1} \text{ wird in } x_{C_n} = -0,20x - 4,80 \text{ eingesetzt.}$$

$$x_C = -0,2 \cdot \frac{4,1}{1,1} - 4,8$$

$$\Rightarrow x_C = -5,55$$

Aufgabe A2.6 (4 Punkte)

Konstruieren Sie in das Koordinatensystem zu 2.1 das Trapez AB_0C_0D , dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

Berechnen Sie sodann die x -Koordinate des Punktes B_0 des Trapezes AB_0C_0D . (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung zu Aufgabe A2.6

Skizze

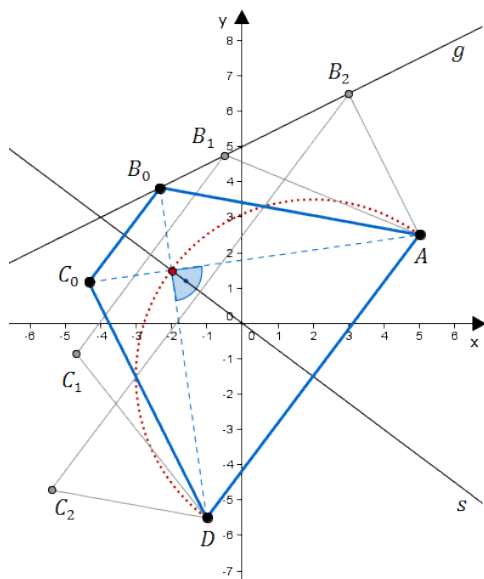
Einzeichnen des Trapezes AB_0C_0D :

Erläuterung: *Einzeichnen*

Im gleichschenkligen Trapez liegt der Schnittpunkt der beiden Diagonalen auf der Symmetrieachse. Da die Diagonalen hier einen 90° -Winkel einschließen, liegt der Schnittpunkt der Diagonalen auch auf dem Thaleskreis um die Strecke $[AD]$.

Nun zeichnet man eine Halbgerade vom Punkt A zum Schnittpunkt der Diagonalen, wodurch man den Punkt B_0 auf der Geraden g erhält.

Der Punkt C_0 ergibt sich durch Spiegelung von B_0 an s .



Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben:

$$A(5|2, 5), \quad D(-1|-5, 5), \quad B_n\left(x|\frac{1}{2}x + 5\right), \quad C_n(-0, 20x - 4, 80|-1, 10x - 1, 40)$$

Die Vektoren $\overrightarrow{AC_0}$ und $\overrightarrow{B_0D}$ stehen senkrecht aufeinander.

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$$\overrightarrow{AC_0} \circ \overrightarrow{B_0D} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -0, 2x - 4, 8 - 5 \\ -1, 1x - 1, 4 - 2, 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 - x \\ -5, 5 - 0, 5x - 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -0, 2x - 9, 8 \\ -1, 1x - 3, 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 - x \\ -10, 5 - 0, 5x \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wird wie folgt dargestellt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$(-0, 2x - 9, 8) \cdot (-1 - x) + (-1, 1x - 3, 9) \cdot (-10, 5 - 0, 5x) = 0$$

$$0, 2x + 0, 2x^2 + 9, 8 + 9, 8x + 11, 55x + 0, 55x^2 + 40, 95 + 1, 95x = 0$$

$$0, 75x^2 + 23, 5x + 50, 75 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-23, 5 \pm \sqrt{23, 5^2 - 4 \cdot 0, 75 \cdot 50, 75}}{2 \cdot 0, 75}$$

$$x_1 = -2, 33 \quad (x_2 = -29 \text{ nicht in Grundmenge enthalten})$$

$$\Rightarrow \quad x_{B_0} = -2, 33$$