Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Der Computerwissenschaftler Gordon Moore sagte voraus, dass sich die Speicherdichte (Einheit: Kilobyte pro cm^2) von Festplatten und anderen Speichermedien alle 1,5 Jahre verdoppeln wird. Anfang des Jahres 1970 betrug die Speicherdichte $\frac{1}{8}\frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$. Das sogenannte Moore'sche Gesetz kann durch die Funktion f mit der Gleichung $y = \frac{1}{8} \cdot 2^{\frac{x}{1,5}}$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dargestellt werden. Dabei steht x für die Anzahl der seit Anfang 1970 vergangenen Jahre und y für die erreichte Speicherdichte in der Einheit $\frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in [0; 30]$ in Schritten von $\Delta x = 5$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung:

Auf der x-Achse: 2 cm für 5 Jahre; $0 \leqq x \leqq 35$
Auf der y-Achse: 1 cm für 10000 $\frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$; $0 \leqq y \leqq 140000$

Aufgabe B1.2 (4 Punkte)

Auf einer 3,5-Zoll Diskette kann eine Datenmenge von 1440 kB gespeichert werden. Die Diskette enthält einen Kreisring mit dem Außendurchmesser $8,6$ cm und dem Innendurchmesser 3 cm, auf dem die Daten beidseitig gespeichert werden.
Berechnen Sie die Speicherdichte y_{Diskette} der Diskette in der Einheit $\frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
Ermitteln Sie sodann, welches Jahr Moore für die Entwicklung einer solchen Diskette vorausgesagt hatte.
[Teilergebnis: $y_{\text{Diskette}} = 14,11$]

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Eine Weiterentwicklung von Disketten ermöglichte eine Speicherdichte von $20000\frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$.
Bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen zu 1.1, in welchem Jahr ein Speichermedium mit dieser Speicherdichte verwirklicht werden konnte.

Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Im Vergleich mit einer CD kann auf einer handelsüblichen und flächengleichen DVD die 6,7fache Datenmenge gespeichert werden.
Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, wie viele Jahre gemäß dem Moore'schen Gesetz zwischen der Einführung der CD und der DVD lagen.

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Im Jahr 1999 konnte eine Speicherdichte von $1 \cdot 10^6\frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$ verwirklicht werden.
Berechnen Sie auf Ganze gerundet, um welchen Faktor diese Speicherdichte über dem von Moore vorausgesagten Wert liegt.

Lösung

Aufgabe B1.

Der Computerwissenschaftler Gordon Moore sagte voraus, dass sich die Speicherdichte (Einheit: Kilobyte pro cm^2) von Festplatten und anderen Speichermedien alle 1,5 Jahre verdoppeln wird. Anfang des Jahres 1970 betrug die Speicherdichte $\frac{1}{8}\frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$. Das sogenannte Moore'sche Gesetz kann durch die Funktion f mit der Gleichung $y = \frac{1}{8} \cdot 2^{\frac{x}{1,5}}$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dargestellt werden. Dabei steht x für die Anzahl der seit Anfang 1970 vergangenen Jahre und y für die erreichte Speicherdichte in der Einheit $\frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in [0; 30]$ in Schritten von $\Delta x = 5$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung:

Auf der x-Achse: 2 cm für 5 Jahre; $\quad 0 \leqq x \leqq 35$
Auf der y-Achse: 1 cm für 10000 $\frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$; $\quad 0 \leqq y \leqq 140000$

Lösung zu Aufgabe B1.1

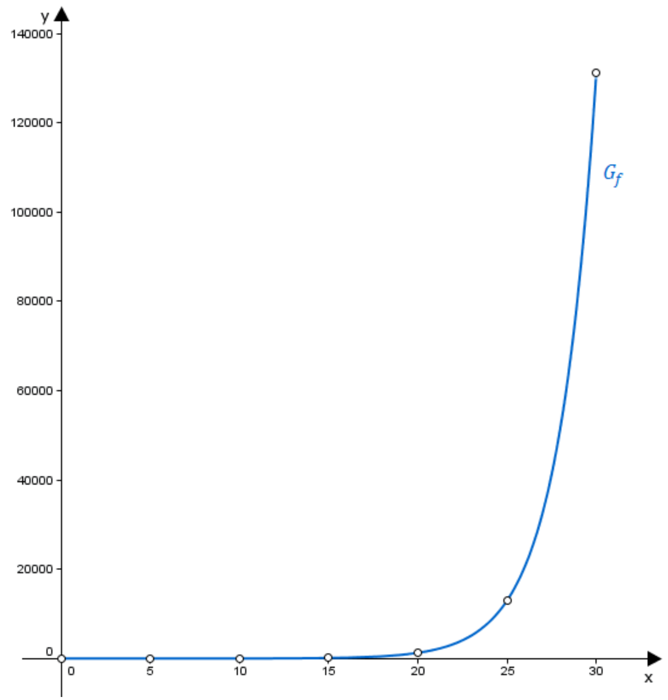
Wertetabelle

$f : y = \frac{1}{8} \cdot 2^{\frac{x}{1,5}}$

Wertetabelle für $x \in [0; 30]$ und $\Delta x = 5$:

x	0	5	10	15	20	25	30
y	0,13	1,26	12,7	128	1290,16	13003,99	131072

Skizze

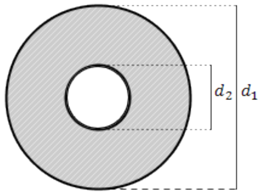


Aufgabe B1.2 (4 Punkte)

Auf einer 3,5-Zoll Diskette kann eine Datenmenge von 1440 kB gespeichert werden. Die Diskette enthält einen Kreisring mit dem Außendurchmesser $8,6$ cm und dem Innendurchmesser 3 cm, auf dem die Daten beidseitig gespeichert werden.
Berechnen Sie die Speicherdichte y_{Diskette} der Diskette in der Einheit $\frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)
Ermitteln Sie sodann, welches Jahr Moore für die Entwicklung einer solchen Diskette vorausgesagt hatte.
[Teilergebnis: $y_{\text{Diskette}} = 14,11$]

Lösung zu Aufgabe B1.2

Flächeninhalt eines Kreisrings



$d_1 = 8,6$ cm (Außendurchmesser)

$d_2 = 3$ cm (Innendurchmesser)

Flächeninhalt des Kreisrings bestimmen:

$A_{\text{Kreisring}} = A_{\text{Außenkreis}} - A_{\text{Innenkreis}}$

> Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreises*
>
> Der Flächeninhalt einer Kreises mir Radius r ist gegeben durch:
>
> $A = r^2 \cdot \pi$

$A_{\text{Kreisring}} = r_1^2 \cdot \pi - r_2^2 \cdot \pi$

$$A_{\text{Kreisring}} = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \cdot \pi - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \cdot \pi$$

$$A_{\text{Kreisring}} = \left[\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2\right] \cdot \pi$$

$$A_{\text{Kreisring}} = \left[\left(\frac{8,6}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \cdot \pi \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt der Diskette bestimmen:

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> Die Daten werden auf der Diskette beidseitig gespeichert.

$$2 \cdot A_{\text{Kreisring}} = 2 \cdot \left[\left(\frac{8,6}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \cdot \pi$$

$\Rightarrow \quad 2 \cdot A_{\text{Kreisring}} \approx 102,04 \text{ cm}^2$

Speicherdichte y_{Diskette} bestimmen:

$$y_{\text{Diskette}} = \frac{1440}{102,4} \approx 14,11 \frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$$

Exponentielles Wachstum

Jahr bestimmen:

$\frac{1}{8} \cdot 2^{\frac{x}{1,5}} = 14,11 \quad | \quad \cdot 8$

$2^{\frac{x}{1,5}} = 8 \cdot 14,11 \quad | \quad \log_2$

> Erläuterung: *Logarithmieren*
>
> Die Exponentialfunktion $2^{\frac{x}{1,5}}$ kann durch den Logarithmus $\log_2$ aufgehoben werden.
>
> Beispiel: $\log_2 x = 3 \iff 2^{\log_2 x} = 2^3 \iff x = 8$

$\frac{x}{1,5} = \log_2(8 \cdot 14,11) \quad | \quad \cdot 1,5$

$x = 1,5 \cdot \log_2(8 \cdot 14,11)$

$\Rightarrow \quad x \approx 10,23$

$\Rightarrow \quad 1970 + 10,23 = 1980,23$

Antwort: Moore hat das Jahr 1980 für die Entwicklung einer solchen Diskette vorausgesagt.

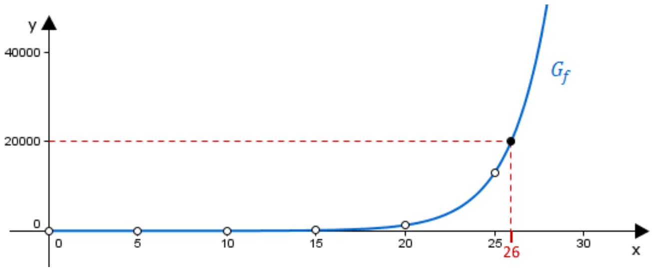
Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Eine Weiterentwicklung von Disketten ermöglichte eine Speicherdichte von $20000\frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Graphen zu 1.1, in welchem Jahr ein Speichermedium mit dieser Speicherdichte verwirklicht werden konnte.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Exponentielles Wachstum

$20000\,\frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$ im Graphen markieren und x-Wert ablesen:



$x \approx 26$ Jahre

$\Rightarrow \quad 1970 + 26 = 1996$

Antwort: Ca. im Jahr 1996 konnte eine solche Diskette verwirklicht werden.

Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Im Vergleich mit einer CD kann auf einer handelsüblichen und flächengleichen DVD die 6,7fache Datenmenge gespeichert werden.

Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, wie viele Jahre gemäß dem Moore'schen Gesetz zwischen der Einführung der CD und der DVD lagen.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Exponentielles Wachstum

CD: $\quad y_{\text{CD}} = \frac{1}{8} \cdot 2^{\frac{x_{\text{CD}}}{1{,}5}}$

DVD: $\quad y_{\text{DVD}} = \frac{1}{8} \cdot 2^{\frac{x_{\text{DVD}}}{1{,}5}}$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Im Vergleich mit einer CD kann auf einer handelsüblichen und flächengleichen DVD die 6,7fache Datenmenge gespeichert werden.

Es muss also gelten: $y_{\text{DVD}} = 6{,}7 \cdot y_{\text{CD}}$

$y_{\text{DVD}} = 6{,}7 \cdot y_{\text{CD}}$

$\frac{1}{8} \cdot 2^{\frac{x_{\text{DVD}}}{1{,}5}} = 6{,}7 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2^{\frac{x_{\text{CD}}}{1{,}5}} \quad | \quad \cdot 8$

$2^{\frac{x_{\text{DVD}}}{1{,}5}} = 6{,}7 \cdot 2^{\frac{x_{\text{CD}}}{1{,}5}} \quad | \quad : 2^{\frac{x_{\text{CD}}}{1{,}5}}$

$$\frac{2^{\frac{x_{\text{DVD}}}{1{,}5}}}{2^{\frac{x_{\text{CD}}}{1{,}5}}} = 6{,}7$$

Erläuterung: *Potenzen mit gleicher Basis*

Potenzgesetz: $\quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$2^{\frac{x_{\text{DVD}} - x_{\text{CD}}}{1{,}5}} = 6{,}7 \quad | \quad \log_2$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $2^{\frac{x_{\text{DVD}} - x_{\text{CD}}}{1{,}5}}$ kann durch den Logarithmus $\log_2$ aufgehoben werden.

Beispiel: $\log_2 x = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^{\log_2 x} = 2^3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 8$

$$\frac{x_{\text{DVD}} - x_{\text{CD}}}{1,5} = \log_2 6,7 \qquad | \qquad \cdot 1,5$$

$$x_{\text{DVD}} - x_{\text{CD}} = 1,5 \cdot \log_2 6,7$$

$$\Rightarrow \qquad x_{\text{DVD}} - x_{\text{CD}} \approx 4,12$$

Antwort: Es lagen etwas über 4 Jahre zwischen der Entwicklung von CD und DVD.

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Im Jahr 1999 konnte eine Speicherdichte von $1 \cdot 10^6 \frac{\text{kB}}{\text{cm}^2}$ verwirklicht werden.
Berechnen Sie auf Ganze gerundet, um welchen Faktor diese Speicherdichte über dem von Moore vorausgesagten Wert liegt.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Exponentielles Wachstum

$$x = 1999 - 1970 = 29 \text{ Jahre}$$

$$y = \frac{1}{8} \cdot 2^{\frac{29}{1,5}} \approx 82570,19$$

$$\frac{1 \cdot 10^6}{82570,19} \approx 12$$

Antwort: Der Faktor beträgt 12.