

Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = 1,5^{x+3} + 1$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Aufgabe A1.1 (3 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in [-8; 1]$ mit $\Delta x = 1$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem und geben Sie die Gleichung der Asymptote h an.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-9 \leq x \leq 3$; $-3 \leq y \leq 9$

Aufgabe A1.2 (5 Punkte)

Der Graph der Funktion f wird durch orthogonale Affinität mit der x -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = -2$ und anschließender Parallelverschiebung mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ auf den Graphen zu f' abgebildet.

Zeigen Sie rechnerisch, dass man für f' die Gleichung $y = -2 \cdot 1,5^{x+1} + 8$ erhält und zeichnen Sie den Graphen zu f' in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Punkte $C_n(x|1,5^{x+3} + 1)$ auf dem Graphen zu f und Punkte D_n auf dem Graphen zu f' sind zusammen mit Punkten A_n und B_n Eckpunkte von Rechtecken $A_n B_n C_n D_n$. Die Punkte C_n und D_n haben jeweils die gleiche Abszisse x . Es gilt: $y_{C_n} < y_{D_n}$ und $\overline{A_n D_n} = 2 LE$.

Zeichnen Sie die Rechtecke $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = -1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = -4$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe A1.4 (3 Punkte)

Ermitteln Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, für welche Belegungen für x es Rechtecke $A_n B_n C_n D_n$ gibt.

Aufgabe A1.5 (4 Punkte)

Unter den Rechtecken $A_n B_n C_n D_n$ gibt es das Quadrat $A_3 B_3 C_3 D_3$.

Berechnen Sie die x -Koordinate des Punktes C_3 .
[Teilergebnis: $\overline{D_n C_n}(x) = (-6,375 \cdot 1,5^x + 7)$ LE]

Lösung

Aufgabe A1.

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = 1,5^{x+3} + 1$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Aufgabe A1.1 (3 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in [-8; 1]$ mit $\Delta x = 1$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem und geben Sie die Gleichung der Asymptote h an.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-9 \leq x \leq 3$; $-3 \leq y \leq 9$

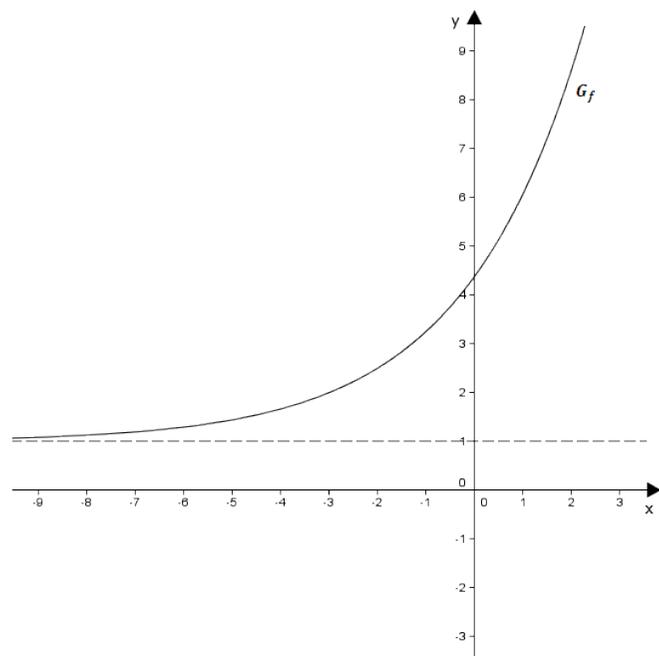
Lösung zu Aufgabe A1.1

Skizze

Wertetabelle erstellen:

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
f(x)	1.13	1,20	1.3	1.44	1,67	2	2.5	3.25	4.38	6.06

Graph G_f der Funktion f zeichnen:



Asymptoten einer Funktion

Für immer kleiner werdende x -Werte wandern die y -Werte der Funktion gegen 1.

⇒ Asymptote $h: y = 1$

Aufgabe A1.2 (5 Punkte)

Der Graph der Funktion f wird durch orthogonale Affinität mit der x -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = -2$ und anschließender Parallelverschiebung mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ auf den Graphen zu f' abgebildet.

Zeigen Sie rechnerisch, dass man für f' die Gleichung $y = -2 \cdot 1,5^{x+3} + 8$ erhält und zeichnen Sie den Graphen zu f' in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Orthogonale Affinität

Gegeben: $k = -2$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$f: y = 1,5^{x+3} + 1$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1,5^{x+3} + 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Orthogonale Affinität*

Matrixdarstellung einer orthogonalen Affinität mit der x -Achse als Affinitätsachse und einem Affinitätsmaßstab k :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1,5^{x+3} + 1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \cdot (1,5^{x+3} + 1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \cdot 1,5^{x+3} - 2 \end{pmatrix}$$

Verschiebung um einen Vektor

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \cdot 1,5^{x+3} - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -2 \cdot 1,5^{x+3} + 8 \end{pmatrix}$$

$$x' = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = x' - 2$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = x' - 2$ wird in y' eingesetzt.

$$y' = -2 \cdot 1,5^{x+3} + 8$$

$$y' = -2 \cdot 1,5^{x'-2+3} + 8$$

$$y' = -2 \cdot 1,5^{x'+1} + 8$$

Erläuterung:

Anstelle von y' und x' wird y und x geschrieben.

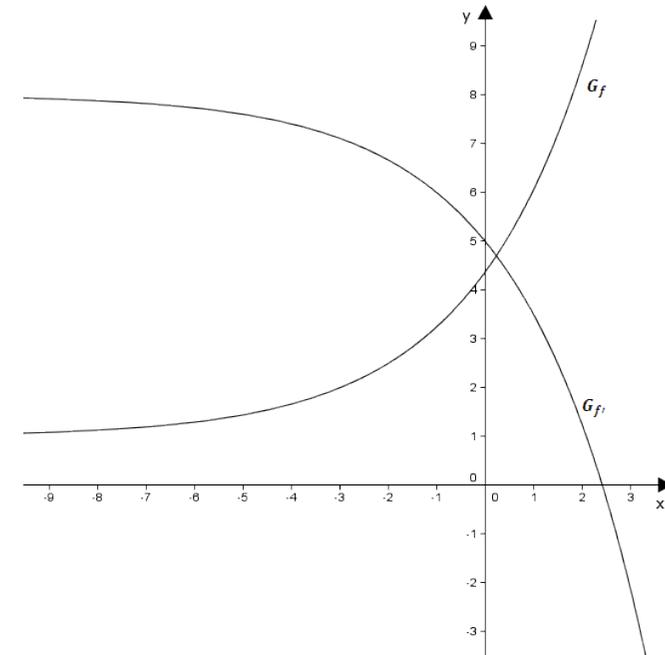
Nun erhält man die Gleichung der Funktion f' :

$$f' : y = -2 \cdot 1,5^{x+1} + 8$$

Skizze

Wertetabelle:

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
f'(x)	7,88	7,82	7,74	7,6	7,41	7,11	6,67	6	5	3,5



Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Punkte $C_n(x|1, 5^{x+3} + 1)$ auf dem Graphen zu f und Punkte D_n auf dem Graphen zu f' sind zusammen mit Punkten A_n und B_n Eckpunkte von Rechtecken $A_n B_n C_n D_n$. Die Punkte C_n und D_n haben jeweils die gleiche Abszisse x . Es gilt: $y_{C_n} < y_{D_n}$ und $\overline{A_n D_n} = 2 LE$.

Zeichnen Sie die Rechtecke $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = -1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = -4$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Skizze

Gegeben:

$$C_n(x|1, 5^{x+3} + 1), \quad y_{C_n} < y_{D_n}, \quad \overline{A_n D_n} = 2 LE$$

Erläuterung: *Einzeichnen*

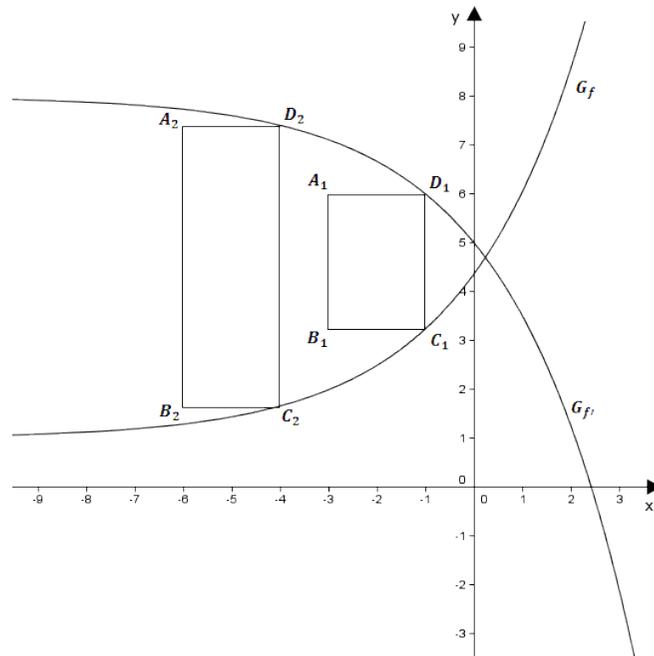
$y_{C_n} < y_{D_n}$ bedeutet, dass die Punkte D_n oberhalb den Punkten C_n liegen.

Da C_n und D_n die gleiche Abszisse (x -Wert) haben, liegen die Punkte D_n genau senkrecht oberhalb den Punkten C_n .

Zuerst wird der Punkt C_1 bei $x = -1$ auf G_f eingezeichnet.
Anschließend wird der Punkt D_1 bei $x = -1$ auf $G_{f'}$ eingezeichnet.

Die Punkte A_1 und B_1 liegen waagrecht im Abstand von 2 LE auf der linken Seite von D_1 und C_1 .

Rechteck $A_2 B_2 C_2 D_2$ analog.



Aufgabe A1.4 (3 Punkte)

Ermitteln Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet, für welche Belegungen für x es Rechtecke $A_n B_n C_n D_n$ gibt.

Lösung zu Aufgabe A1.4

Schnittpunkt zweier Funktionen

Gegeben:

$$f : y = 1,5^{x+3} + 1$$

$$f' : y = -2 \cdot 1,5^{x+1} + 8$$

Rechtecke $A_n B_n C_n D_n$ gibt es genau dann, so lange die Punkte C_n und D_n nicht zusammenfallen. Beim Schnittpunkt von G_f und $G_{f'}$ kann kein Rechteck mehr gebildet werden.

Rechts vom Schnittpunkt der beiden Graphen würden sich die Punkte C_n und D_n „vertauschen“, da G_f nach oben und $G_{f'}$ nach unten wandert.

Somit existieren Rechtecke $A_n B_n C_n D_n$ nur links vom Schnittpunkt der beiden Graphen.

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Schema für das Bestimmen der x -Koordinate der Schnittpunkte zweier Funktionen:

1. Funktionsgleichungen gleich setzen.
2. Gleichung nach x auflösen.

$$1,5^{x+3} + 1 = -2 \cdot 1,5^{x+1} + 8 \quad | \quad -1 + 2 \cdot 1,5^{x+1}$$

$$1,5^{x+3} + 2 \cdot 1,5^{x+1} = 7$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Hier:

$$1,5^{x+3} = 1,5^x \cdot 1,5^3$$

$$1,5^{x+1} = 1,5^x \cdot 1,5^1$$

$$1,5^x \cdot 1,5^3 + 2 \cdot 1,5^x \cdot 1,5 = 7 \quad | \quad \text{Ausklammern}$$

$$1,5^x \cdot (1,5^3 + 2 \cdot 1,5) = 7$$

$$1,5^x \cdot 6,375 = 7 \quad | \quad : 6,375$$

$$1,5^x = \frac{7}{6,375} \quad | \quad \log_{1,5}$$

Erläuterung:

Die Exponentialfunktion $1,5^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{1,5}$ aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } 2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$$

$$x = \log_{1,5} \frac{7}{6,375}$$

$$x \approx 0,23$$

$$\Rightarrow x \in]-\infty; 0,23[$$

Aufgabe A1.5 (4 Punkte)

Unter den Rechtecken $A_n B_n C_n D_n$ gibt es das Quadrat $A_3 B_3 C_3 D_3$.

Berechnen Sie die x -Koordinate des Punktes C_3 .

[Teilergebnis: $\overline{D_n C_n}(x) = (-6,375 \cdot 1,5^x + 7)$ LE]

Lösung zu Aufgabe A1.5

Länge eines Vektors

Gegeben:

Punkte $C_n(x|1,5^{x+3} + 1)$ auf dem Graphen zu f

Punkte $D_n(x|-2 \cdot 1,5^{x+1} + 8)$ auf dem Graphen zu f

Gesucht: x -Koordinate von C_3

Im Quadrat $A_3 B_3 C_3 D_3$ gilt: $\overline{A_3 D_3} = \overline{C_3 D_3} = 2$ LE

$$\overline{C_n D_n} = \overrightarrow{D_n} - \overrightarrow{C_n} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \cdot 1,5^{x+1} + 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 1,5^{x+3} + 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{C_n D_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \cdot 1,5^{x+1} - 1,5^{x+3} + 7 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge \bar{a} eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\bar{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{C_n D_n} = \sqrt{(-2 \cdot 1,5^{x+1} - 1,5^{x+3} + 7)^2}$$

$$\overline{C_n D_n} = -2 \cdot 1,5^{x+1} - 1,5^{x+3} + 7$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

Die Regel die verwendet wird: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Hier:

$$1,5^{x+1} = 1,5^x \cdot 1,5^1$$

$$1,5^{x+3} = 1,5^x \cdot 1,5^3$$

$$\overline{C_n D_n} = -2 \cdot 1,5^x \cdot 1,5 - 1,5^x \cdot 1,5^3 + 7 \quad | \quad \text{Ausklammern}$$

$$\overline{C_n D_n} = 1,5^x \cdot (-2 \cdot 1,5 - 1,5^3) + 7$$

$$\overline{C_n D_n} = 1,5^x \cdot (-6,375) + 7$$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Da im Quadrat alle vier Seiten gleich lang sind, wird $\overline{C_n D_n} = 2 \text{ LE}$ gesetzt.

$$1,5^x \cdot (-6,375) + 7 = 2 \quad | \quad -7$$

$$1,5^x \cdot (-6,375) = -5 \quad | \quad : (-6,375)$$

$$1,5^x = \frac{-5}{-6,375} \quad | \quad \log_{1,5}$$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $1,5^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{1,5}$ aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } 2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$$

$$x = \log_{1,5} \left(\frac{-5}{-6,375} \right)$$

$$\Rightarrow x \approx -0,60$$