

Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Die gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke AB_nC_n bilden eine Dreiecksschar mit dem gemeinsamen Punkt $A(0|0)$. Auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -2x + 6$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) liegen die Mittelpunkte $M_n(x | -2x + 6)$ der Hypotenusen $[AB_n]$.

Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g und die Dreiecke AB_1C_1 für $x = 1$ und AB_2C_2 für $x = 3$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 7$; $-1 \leq y \leq 9$

Aufgabe A2.2 (5 Punkte)

Stellen Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n dar und bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen h der Punkte C_n .
[Teilergebnis: $C_n(3x - 6 | -x + 6)$]

Aufgabe A2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke AB_nC_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n gilt: $A(x) = (5x^2 - 24x + 36)$ FE.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Die Dreiecke AB_3C_3 und AB_4C_4 haben jeweils einen Flächeninhalt von 36 FE. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C_3 und C_4 .

Aufgabe A2.5 (4 Punkte)

Unter den Dreiecken AB_nC_n gibt es das Dreieck AB_5C_5 , bei dem der Punkt C_5 auf der Gerade g liegt.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C_5 und begründen Sie, dass das Dreieck AB_5C_5 den kleinsten Flächeninhalt aller Dreiecke AB_nC_n besitzt.

Lösung

Aufgabe A2.

Die gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecke AB_nC_n bilden eine Dreiecksschar mit dem gemeinsamen Punkt $A(0|0)$. Auf der Geraden g mit der Gleichung $y = -2x + 6$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) liegen die Mittelpunkte $M_n(x | -2x + 6)$ der Hypotenusen $[AB_n]$.

Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g und die Dreiecke AB_1C_1 für $x = 1$ und AB_2C_2 für $x = 3$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 7$; $-1 \leq y \leq 9$

Lösung zu Aufgabe A2.1

Skizze

Gegeben:

Punkte $M_n(x | -2x + 6)$ sind Mittelpunkte der Hypotenusen $[AB_n]$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst werden die Gerade g und der Punkt M_1 eingezeichnet.

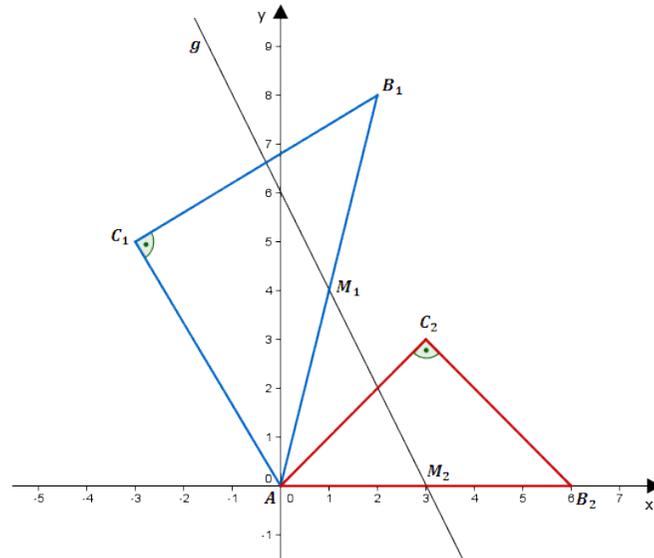
Anschließend verbindet man A mit M_1 .

Da M_1 der Mittelpunkt der Hypotenuse $[AB_1]$ ist, gilt: $\overline{AM_1} = \overline{M_1B_1}$. Somit kann B_1 eingezeichnet werden.

Da der rechte Winkel eines Dreiecks immer gegenüber der Hypotenuse liegt, muss der Punkt C_1 auf dem Thaleskreis um $[AB_1]$ liegen.

Da das Dreieck AB_1C_1 gleichschenkelig ist, verläuft die Höhe h_{C_1} durch M_1 . Der Schnittpunkt des Thaleskreises mit h_{C_1} liefert C_1 .

Zeichnung von AB_2C_2 analog.

**Aufgabe A2.2** (5 Punkte)

Stellen Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n dar und bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen h der Punkte C_n .

[Teilergebnis: $C_n(3x - 6 | -x + 6)$]

Lösung zu Aufgabe A2.2**Koordinaten von Punkten ermitteln**

Gegeben: $A(0|0)$, $M_n(x | -2x + 6)$

Gesucht: C_n

Vorüberlegung: Wie kommt man von M_n nach C_n ?

Erläuterung: *Drehmatrix*

$\overrightarrow{AC_n} (= \overrightarrow{C_n})$ erhält man durch Drehung von $\overrightarrow{AM_n}$ um A mit dem Drehwinkel 45° .

Ist α der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende

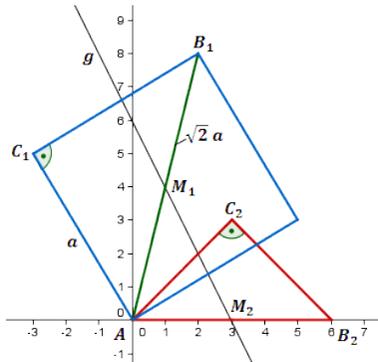
Drehmatrix: $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM_n} &= \begin{pmatrix} x \\ -2x + 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x + 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -2x + 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -2x + 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}(-2x + 6) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}(-2x + 6) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Erläuterung: *Zentrische Streckung*

$\overrightarrow{AC_n}$ hat aber nicht die gleiche Länge wie $\overrightarrow{AM_n}$.

Spiegelt man das Dreieck AB_nC_n an AB_n , so erhält man ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = \overline{AC_n}$.



Die Diagonale $[AB_n]$ dieses Quadrates besitzt die Länge $\overline{AB_n} = \sqrt{2}a$ (Pythagoras!).

$$\Rightarrow \overline{AM_n} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a = 2^{\frac{1}{2}-1}a = 2^{-\frac{1}{2}}a = \frac{1}{\sqrt{2}}a$$

Also muss $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ noch um den Faktor $\sqrt{2}$ gestreckt werden, um die gewünschte Länge $a = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}a$ zu erhalten.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}(-2x+6) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}(-2x+6) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - (-2x+6) \\ x + (-2x+6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-6 \\ -x+6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_n(3x-6 | -x+6)$$

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Gegeben: $C_n(3x-6 | -x+6)$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n

Gesucht: Trägergraph $h : y = ?$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die x -Koordinate $x^* = 3x - 6$ von C_n wird nach x aufgelöst.

Anschließend wird der Term in die y -Koordinate von C_n eingesetzt.

$$x^* = 3x - 6 \quad | \quad +6$$

$$x^* + 6 = 3x \quad | \quad :3$$

$$\frac{x^* + 6}{3} = x$$

$$y^* = -x + 6$$

$$y^* = -\left(\frac{x^* + 6}{3}\right) + 6 = -\frac{1}{3} \cdot (x^* + 6) + 6 = -\frac{1}{3}x^* + 4$$

$$\Rightarrow h : y = -\frac{1}{3}x + 4$$

Aufgabe A2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke AB_nC_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte M_n gilt: $A(x) = (5x^2 - 24x + 36)$ FE.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Flächeninhalt eines Dreiecks

Gesucht: Flächeninhalt A der Dreiecke AB_nC_n

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Da die Dreiecke AB_nC_n bei C_n rechtwinklig sind, sind Grundlinie und Höhe die beiden Katheten $[AC_n]$ und $[B_nC_n]$.

Da die Dreiecke AB_nC_n ebenso gleichschenkelig sind, gilt: $\overline{B_nC_n} = \overline{AC_n}$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC_n} \cdot \overline{B_nC_n}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC_n}^2$$

$$\overline{AC_n} = \vec{C_n} = \begin{pmatrix} 3x-6 \\ -x+6 \end{pmatrix} \quad (\text{aus Teilaufgabe 2.2})$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Der Betrag (Länge) eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird wie folgt berechnet:

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overline{AC_n} = \sqrt{(3x-6)^2 + (-x+6)^2}$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

$$\text{Zweite binomische Formel: } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(-x+6)^2 = (6-x)^2$$

$$\overline{AC_n} = \sqrt{9x^2 - 36x + 36 + x^2 - 12x + 36}$$

$$\overline{AC_n} = \sqrt{10x^2 - 48x + 72}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC_n}^2$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10x^2 - 48x + 72}^2 = \frac{1}{2} \cdot (10x^2 - 48x + 72) = 5x^2 - 24x + 36$$

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Die Dreiecke AB_3C_3 und AB_4C_4 haben jeweils einen Flächeninhalt von 36 FE. Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C_3 und C_4 .

Lösung zu Aufgabe A2.4

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A(x) = (5x^2 - 24x + 36)\text{FE}$, $A = 36\text{FE}$

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Flächeninhalt $A = 36$ wird in die Gleichung $A = 5x^2 - 24x + 36$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$$36 = 5x^2 - 24x + 36 \quad | \quad -36$$

$$0 = 5x^2 - 24x$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$ löst man durch Ausklammern von x und anschließender Überprüfung, wann das entstandene Produkt $x \cdot (ax + b)$ Null wird.

$$0 = x \cdot (5x - 24)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = 4,8$$

Es gilt: $C_n(3x-6 | -x+6)$ (aus Teilaufgabe 2.2)

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_1 = 0$ und $x_2 = 4,8$ werden in $C_n(3x-6 | -x+6)$ eingesetzt.

$$C_3(-6 | 6)$$

$$C_4(8,4 | 1,2)$$

Aufgabe A2.5 (4 Punkte)

Unter den Dreiecken AB_nC_n gibt es das Dreieck AB_5C_5 , bei dem der Punkt C_5 auf der Gerade g liegt.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C_5 und begründen Sie, dass das Dreieck AB_5C_5 den kleinsten Flächeninhalt aller Dreiecke AB_nC_n besitzt.

Lösung zu Aufgabe A2.5

Koordinaten von Punkten ermitteln



Gegeben:

$$C_5 \in g$$

$$g : y = -2x + 6$$

Trägergraph h der Punkte C_n : $y = -\frac{1}{3}x + 4$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Da C_5 auf der Geraden g und auf dem Trägergraph h der Punkte C_n liegt, werden die beiden Gleichungen gleichgesetzt.

$$-2x + 6 = -\frac{1}{3}x + 4 \quad | \quad +\frac{1}{3}x - 6$$

$$-\frac{5}{3}x = -2 \quad | \quad : \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$x = 1,2$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = 1,2$ wird in $y = -2x + 6$ eingesetzt.

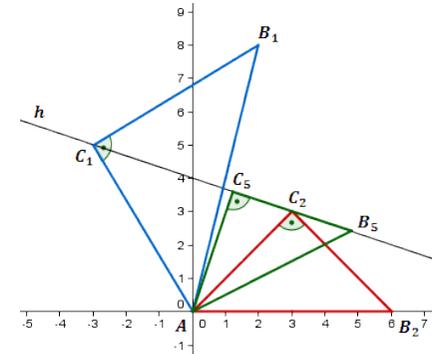
$$y = -2 \cdot 1,2 + 6 = 3,6$$

$$C_5(1,2|3,6)$$

Lagebeziehung von Vektoren

Der Flächeninhalt der Dreiecke AB_nC_n ist minimal, wenn $\overline{AC_n}$ minimal ist.

$\overline{AC_n}$ ist minimal, wenn $\overline{AC_n}$ senkrecht auf h steht, also $\overline{AC_n} \perp h$.



Erläuterung: *Skalarprodukt*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$$\overline{AC_n} \circ \vec{v}_h = 0 \quad \text{mit } \vec{v}_h \text{ als Richtungsvektor von } h.$$

Erläuterung: *Richtungsvektor*

Liegt die Steigung m einer Geraden in Form eines Bruches vor, so ist der Zähler die y -Koordinate und der Nenner die x -Koordinate des Richtungsvektors.

$$\text{Hier: } m = -\frac{1}{3} = \frac{1}{-3}$$

$$\vec{v}_h = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{AC_n} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{AC_n} = \begin{pmatrix} 3x - 6 \\ -x + 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 6 \\ -x + 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x - 6 \\ -x + 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(3x - 6) \cdot (-3) + (-x + 6) \cdot 1 = 0$$

$$-9x + 18 - x + 6 = 0$$

$$-10x + 24 = 0 \quad | \quad -24$$

$$-10x = -24 \quad | \quad :(-10)$$

$$x = 2,4$$

Gegeben: $C_n(3x - 6 | -x + 6)$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = 2,4$ wird in $C_n(3x - 6 | -x + 6)$ eingesetzt.

$$3 \cdot 2,4 - 6 = 1,2 \quad x\text{-Wert von } C_5$$

$$-2,4 + 6 = 3,6 \quad y\text{-Wert von } C_5$$

⇒ Das Dreieck AB_5C_5 hat den kleinsten Flächeninhalt.