Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die Pfeile $\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - 3 \\ \sin^2\varphi \end{pmatrix}$ mit $A(2|1)$ spannen für $\varphi \in [0°; 180°]$ Dreiecke AB_nC_n auf.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AC_1}$ für $\varphi = 30°$, $\overrightarrow{AB_2}$ und $\overrightarrow{AC_2}$ für $\varphi = 90°$ und $\overrightarrow{AB_3}$ und $\overrightarrow{AC_3}$ für $\varphi = 150°$ jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. Zeichnen Sie sodann die Dreiecke AB_1C_1, AB_2C_2 und AB_3C_3 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 4$; $-1 \leqq y \leqq 5$

Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Die Pfeile $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AC_1}$ schließen einen Winkel mit dem Maß α ein.
Berechnen Sie das Maß α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Aufgabe B2.3 (1 Punkt)

Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $C_n(2\cos\varphi - 1|sin^2\varphi + 1)$]

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Ermitteln Sie die Gleichung des Trägergraphen p der Punkte C_n und zeichnen Sie den Trägergraph p in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Berechnen Sie den Wert von φ, sodass der Punkt C_4 auf der y-Achse liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_4.

Aufgabe B2.6 (5 Punkte)

Im rechtwinkligen Dreieck AB_5C_5 ist die Strecke $[B_5C_5]$ die Hypotenuse.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert von φ.

Lösung

Aufgabe B2.

Die Pfeile $\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - 3 \\ \sin^2\varphi \end{pmatrix}$ mit $A(2|1)$ spannen für $\varphi \in [0°; 180°]$ Dreiecke AB_nC_n auf.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AC_1}$ für $\varphi = 30°$, $\overrightarrow{AB_2}$ und $\overrightarrow{AC_2}$ für $\varphi = 90°$ und $\overrightarrow{AB_3}$ und $\overrightarrow{AC_3}$ für $\varphi = 150°$ jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. Zeichnen Sie sodann die Dreiecke AB_1C_1, AB_2C_2 und AB_3C_3 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 4$; $-1 \leqq y \leqq 5$

Lösung zu Aufgabe B2.1

Koordinaten von Vektoren bestimmen

Gegeben:

$$\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - 3 \\ \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Werte $\varphi = 30°(90°, 150°)$ werden in $\overrightarrow{AB_n} = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - 3 \\ \sin^2\varphi \end{pmatrix}$ eingesetzt.

$$\overrightarrow{AB_1} = \begin{pmatrix} 3\cos 30° - 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,60 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 2\cos 30° - 3 \\ \sin^2 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,27 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB_2} = \begin{pmatrix} 3\cos 90^\circ - 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC_2} = \begin{pmatrix} 2\cos 90^\circ - 3 \\ \sin^2 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AB_3} = \begin{pmatrix} 3\cos 150^\circ - 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,60 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC_3} = \begin{pmatrix} 2\cos 150^\circ - 3 \\ \sin^2 150^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4,73 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

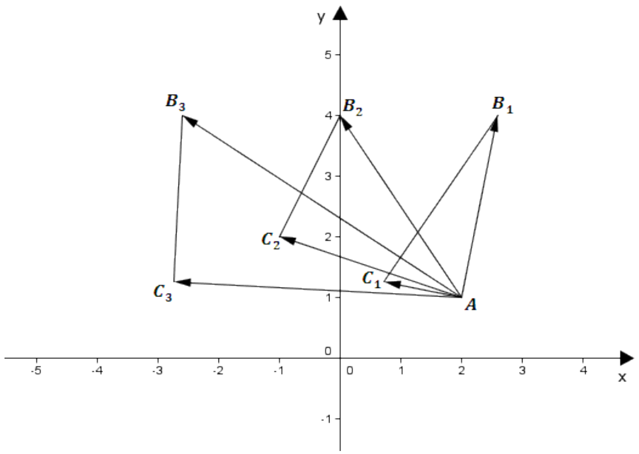
Skizze

Ebenso gegeben ist der Punkt $A(2|1)$.

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird der Punkt $A(2|1)$ eingezeichnet. Danach zeichnet man die Vektoren $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AC_1}$ ein und verbindet die Eckpunkte zum Dreieck AB_1C_1.

Dreiecke AB_2C_2 und AB_3C_3 analog.



Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Die Pfeile $\overrightarrow{AB_1}$ und $\overrightarrow{AC_1}$ schließen einen Winkel mit dem Maß α ein. Berechnen Sie das Maß α auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe B2.2

Winkel zwischen zwei Vektoren

Gegeben aus Teilaufgabe 1.1:

$$\overrightarrow{AB_1} = \begin{pmatrix} 0,60 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} -1,27 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren*

Den Winkel α zwischen zwei Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ berechnet man mit der Formel:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

Beispiel: $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\binom{0}{3} \circ \binom{2}{1}}{|\binom{0}{3}| \cdot |\binom{2}{1}|}$$
$$\cos\alpha = \frac{0 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{\sqrt{0^2+3^2} \cdot \sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = 63,43^\circ$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB_1} \circ \overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}} = \frac{\binom{0,60}{3} \circ \binom{-1,27}{0,25}}{\sqrt{0,60^2+3^2} \cdot \sqrt{(-1,27)^2+0,25^2}}$$
$$\cos\alpha = \frac{0,60 \cdot (-1,27) + 3 \cdot 0,25}{\sqrt{0,60^2+3^2} \cdot \sqrt{(-1,27)^2+0,25^2}} \quad | \quad \cos^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad \alpha \approx 90,17^\circ$$

Aufgabe B2.3 (1 Punkte)

Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $C_n(2\cos\varphi - 1|s\,i\,n^2\,\varphi + 1)$]

Lösung zu Aufgabe B2.3

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - 3 \\ \sin^2\varphi \end{pmatrix}$, $A(2|1)$

$\overrightarrow{AC_n}$ kann man auch wie folgt schreiben:

$\overrightarrow{AC_n} = \overrightarrow{C_n} - \overrightarrow{A}$ („Spitze minus Fuß“)

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{C_n} = \overrightarrow{AC_n} + \overrightarrow{A}$

$\overrightarrow{C_n} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - 3 \\ \sin^2\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - 1 \\ \sin^2\varphi + 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad C_n(2\cos\varphi - 1|\sin^2\varphi + 1)$

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Ermitteln Sie die Gleichung des Trägergraphen p der Punkte C_n und zeichnen Sie den Trägergraph p in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B2.4

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Gegeben: $C_n(2\cos\varphi - 1|\sin^2\varphi + 1)$

Gesucht: Trägergraph $p : y = ?$

> Erläuterung: *Trägergraphen*
>
> Die x-Koordinate $2\cos\varphi - 1$ von C_n wird nach x aufgelöst.
>
> Anschließend wird der Term in die y-Koordinate von C_n eingesetzt.

$x' = 2\cos\varphi - 1 \quad | \quad +1$

$x' + 1 = 2\cos\varphi \quad | \quad :2$

$\dfrac{x'+1}{2} = \cos\varphi$

Dies kann jedoch noch nicht in $\sin^2\varphi + 1$ eingesetzt werden (Umwandlung nötig).

> Erläuterung: *Additionstheorem*
>
> $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ siehe Formelsammlung
>
> $\Rightarrow \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$y' = \sin^2\varphi + 1$

$y' = 1 - \cos^2\varphi + 1$

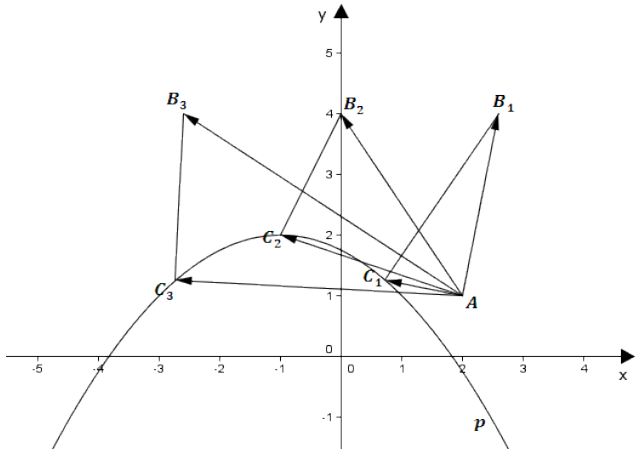
$y' = 1 - \left(\dfrac{x'+1}{2}\right)^2 + 1$

$y' = 2 - \dfrac{1}{4}(x'+1)^2$

$\Rightarrow \quad p : y = -\dfrac{1}{4}(x+1)^2 + 2$

Skizze

Der Trägergraph p ist eine nach unten geöffnete, gestauchte Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(-1|2)$.



Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Berechnen Sie den Wert von φ, sodass der Punkt C_4 auf der y-Achse liegt, und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_4.

Lösung zu Aufgabe B2.5

Winkel bestimmen

Gegeben aus Teilaufgabe 2.3:

$C_n(2\cos\varphi - 1|s\,i\,n^2\,\varphi + 1)$

> Erläuterung: *Punktkoordinaten*
>
> Alle Punkte auf der y-Achse besitzen den x-Wert 0.
>
> Deshalb wird die x-Koordinate von C_n gleich null gesetzt.

$2\cos\varphi - 1 = 0 \quad | \quad +1$

$2\cos\varphi = 1 \quad | \quad :2$

$\cos\varphi = \frac{1}{2} \quad | \quad \cos^{-1}$

$\Rightarrow \quad \varphi_1 = 60°, \quad (\varphi_2 = 300°)$, da $\varphi \in [0°; 180°]$

Koordinaten von Punkten ermitteln

Der Punkt C_4 besitzt also folgende Koordinaten:

$C_4(0|(\sin 60°)^2 + 1)$

$\Rightarrow \quad C_4(0|1,75)$

Aufgabe B2.6 (5 Punkte)

Im rechtwinkligen Dreieck $A\,B_5\,C_5$ ist die Strecke $[B_5\,C_5]$ die Hypotenuse.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert von φ.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Winkel bestimmen

Gegeben:

$\overrightarrow{A\,B_n} = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{A\,C_n} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - 3 \\ \sin^2\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0°; 180°]$

Wenn die Strecke $[B_5\,C_5]$ die Hypothenuse des Dreiecks ist, so liegt der rechte Winkel gegenüber beim Punkt A.

Deshalb stehen die Vektoren $\overrightarrow{A\,B_5}$ und $\overrightarrow{A\,C_5}$ senkrecht aufeinander, also $\overrightarrow{A\,B_5} \perp \overrightarrow{A\,C_5}$.

> Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*
>
> Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$\overrightarrow{A\,B_5} \circ \overrightarrow{A\,C_5} = 0$

$\begin{pmatrix} 3\cos\varphi - 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - 3 \\ \sin^2\varphi \end{pmatrix} = 0$

> Erläuterung: *Skalarprodukt*
>
> Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wird wie folgt dargestellt:
>
> $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

$(3\cos\varphi - 2) \cdot (2\cos\varphi - 3) + 3 \cdot \sin^2\varphi = 0 \quad | \quad$ Klammern auflösen

$6\cos^2\varphi - 4\cos\varphi - 9\cos\varphi + 6 + 3\sin^2\varphi = 0$

> Erläuterung: *Additionstheorem*
>
> $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
>
> $\Rightarrow \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$6\cos^2\varphi - 13\cos\varphi + 6 + 3(1 - \cos^2\varphi) = 0$

$6\cos^2\varphi - 13\cos\varphi + 6 + 3 - 3\cos^2\varphi = 0$

$3\cos^2\varphi - 13\cos\varphi + 9 = 0$

Substitution: $\cos\varphi = z$

$3z^2 - 13z + 9 = 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$z_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4\cdot 3\cdot 9}}{2\cdot 3}$$

$\Rightarrow \quad z_1 \approx 3,47 \quad$ und $\quad z_2 \approx 0,86$

Resubstitution: $\cos\varphi = 3,47$ und $\cos\varphi = 0,86$

$\cos\varphi = 3,47$ ist nicht definiert, da der Kosinus eines Winkels immer zwischen -1 und 1 liegt.

$\cos\varphi = 0,86 \quad | \quad \cos^{-1}$
$\varphi_1 \approx 30,68°$ (und $\varphi_2 = 329,32°$), da $\varphi \in [0°; 180°]$

$\Rightarrow \quad \varphi = 30,68°$