

Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die Raute $ABCD$ mit den Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCD S$, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt M der Raute $ABCD$ liegt.

Es gilt: $\overline{AC} = 14 \text{ cm}$; $\overline{BD} = 10 \text{ cm}$; $\overline{MS} = 5 \text{ cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCD S$, wobei die Diagonale $[AC]$ auf der Schrägbildachse liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Auf der geradlinigen Verlängerung der Kante $[CS]$ über den Punkt S hinaus liegen Punkte E_n . Die Punkte E_n sind die Spitzen von Pyramiden $ABCD E_n$ mit den Höhen $[E_n F_n]$, deren Fußpunkte F_n auf der Halbgeraden $[MA]$ liegen. Die Strecken $[MS]$ und $[ME_n]$ schließen Winkel $SM E_n$ mit dem Maß φ ein.

Zeichnen Sie die Pyramide $ABCD E_1$ für $\varphi = 30^\circ$ und ihre Höhe $[E_1 F_1]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Für alle Pyramiden $ABCD E_n$ gilt: $\varphi \in]0^\circ; 54,46^\circ[$.

Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[ME_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$\overline{ME_n}(\varphi) = \frac{4,07}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm.}$$

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen V der Pyramiden $ABCD E_n$ in Abhängigkeit von φ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{94,97 \cdot \cos \varphi}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3]$$

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Die Pyramide $ABCD E_2$ hat das Volumen 210 cm^3 .

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ .

Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Die Spitze E_0 der Pyramide $ABCD E_0$ liegt senkrecht über dem Punkt A .

Berechnen Sie das Maß φ des Winkels $SM E_0$.

Lösung

Aufgabe B2.

Die Raute $ABCD$ mit den Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCD S$, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt M der Raute $ABCD$ liegt.

Es gilt: $\overline{AC} = 14 \text{ cm}$; $\overline{BD} = 10 \text{ cm}$; $\overline{MS} = 5 \text{ cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCD S$, wobei die Diagonale $[AC]$ auf der Schrägbildachse liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

$$\overline{AC} = 14 \text{ cm}; \quad \overline{BD} = 10 \text{ cm}; \quad \overline{MS} = 5 \text{ cm}$$

$q = \frac{1}{2}$ ist der Faktor für die Diagonale $[BD]$ im Schrägbild.

Für die Länge der Diagonale im Schrägbild gilt somit:

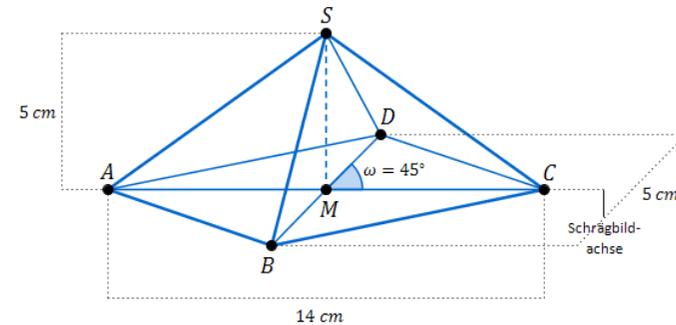
$$\overline{BD} = 10 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} \cdot q = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ cm}$$

Winkel der Diagonale zur Schrägbildachse ist $\omega = 45^\circ$.

Erläuterung: *Eigenschaften einer Raute*

Die Grundfläche $ABCD$ der Pyramide ist eine Raute.

Da sich die Diagonalen einer Raute halbieren, muss der Mittelpunkt M der Strecke $[AC]$ ermittelt werden, bevor die Strecke $[BD]$ eingezeichnet werden kann.



Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Auf der geradlinigen Verlängerung der Kante $[CS]$ über den Punkt S hinaus liegen Punkte E_n . Die Punkte E_n sind die Spitzen von Pyramiden $ABCD E_n$ mit den Höhen $[E_n F_n]$, deren Fußpunkte F_n auf der Halbgeraden $[MA]$ liegen. Die Strecken $[MS]$ und $[ME_n]$ schließen Winkel $SM E_n$ mit dem Maß φ ein.

Zeichnen Sie die Pyramide $ABCD E_1$ für $\varphi = 30^\circ$ und ihre Höhe $[E_1 F_1]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

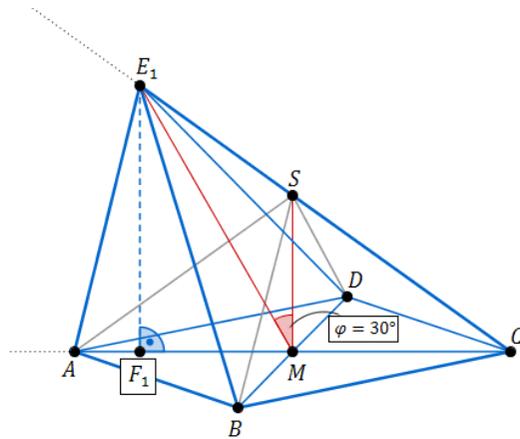
Für alle Pyramiden $ABCD E_n$ gilt: $\varphi \in]0^\circ; 54,46^\circ[$.

Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

Lösung zu Aufgabe B2.2

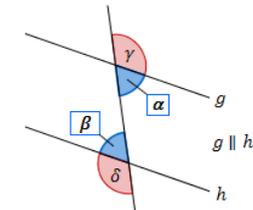
Skizze

$ABCD E_1$ für $\varphi = 30^\circ$:

**Winkel bestimmen****Überlegung:**

Wenn $[ME_n]$ parallel zu $[CS]$ wäre, dann würde es keine Pyramide $ABCDE_n$ geben.

Erläuterung: Wechselwinkel / Z-Winkel

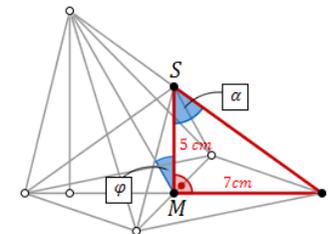


Werden zwei parallele Geraden g und h von einer dritten Geraden geschnitten, so gelten für die Wechselwinkel folgende Beziehungen:

$$\alpha = \beta \quad \text{und} \quad \gamma = \delta$$

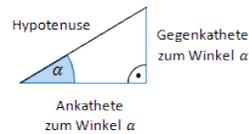
Wenn $[ME_n]$ parallel zu $[CS]$ wäre, dann würden die Wechselwinkel φ und $\underbrace{\angle MSC}_{\alpha}$ gleich sein.

Das ist der Fall wenn $\varphi = \underbrace{\angle MSC}_{\alpha}$.



Im rechtwinkligen Dreieck SMC gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{MS}} = \frac{7}{5}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel α aus $\tan \alpha = \frac{7}{5}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{7}{5} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{7}{5} \right) \approx 54,46^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi =]0; \alpha[=]0; 54,46^\circ[$$

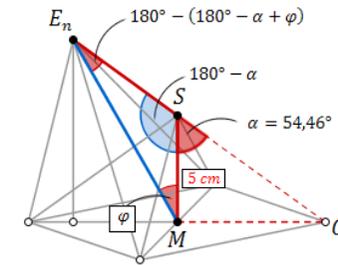
Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[ME_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$\overline{ME_n}(\varphi) = \frac{4,07}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm.}$$

Lösung zu Aufgabe B2.3

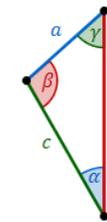
Seite eines Dreiecks bestimmen



Betrachtet wird das Dreieck $E_n M S$.

Nach dem Sinussatz gilt:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck $E_n M S$ gilt somit: $\frac{\overline{ME_n}}{\overline{MS}} = \frac{\sin \angle E_n S M}{\sin \angle M E_n S}$

$$\frac{\overline{M E_n}}{\overline{M S}} = \frac{\sin \angle E_n S M}{\sin \angle M E_n S}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Im Dreieck $E_n M S$ gilt somit: $\angle M E_n S + \angle E_n S M + \varphi = 180^\circ$

$$\frac{\overline{M E_n}}{5} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - (180^\circ - \alpha + \varphi))}$$

$$\frac{\overline{M E_n}}{5} = \frac{\sin(125,54^\circ)}{\sin(180^\circ - (125,54^\circ + \varphi))}$$

Erläuterung: *Funktionswerte der Sinusfunktion*

	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ \pm \alpha$
sin	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
cos	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$

Hier: $\sin(180^\circ - \underbrace{(125,54^\circ + \varphi)}_{\alpha}) = \sin(125,54^\circ + \varphi)$

$$\frac{\overline{M E_n}}{5} = \frac{\sin(125,54^\circ)}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \quad | \cdot 5$$

$$\begin{aligned} \overline{M E_n} &= \frac{5 \cdot \sin(125,54^\circ)}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \\ \Rightarrow \overline{M E_n}(\varphi) &\approx \frac{4,07}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm} \end{aligned}$$

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

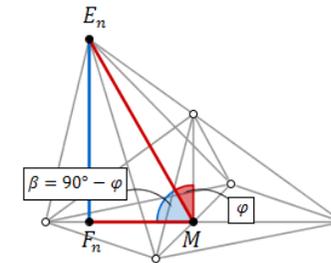
Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen V der Pyramiden $ABCDE_n$ in Abhängigkeit von φ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{94,97 \cdot \cos \varphi}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3]$$

Lösung zu Aufgabe B2.4

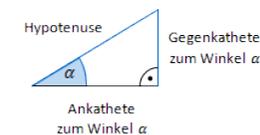
Seite eines Dreiecks bestimmen

Nebenrechnung: Höhe $[E_n F_n]$ der Pyramide bestimmen



Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $F_n M E_n$.

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin \underbrace{\angle E_n M F_n}_{\beta} = \frac{\overline{E_n F_n}}{\overline{M E_n}} \quad | \cdot \overline{M E_n}$$

$$\overline{E_n F_n} = \overline{M E_n} \cdot \sin \beta$$

$$\overline{E_n F_n} = \overline{M E_n} \cdot \sin(90^\circ - \varphi)$$

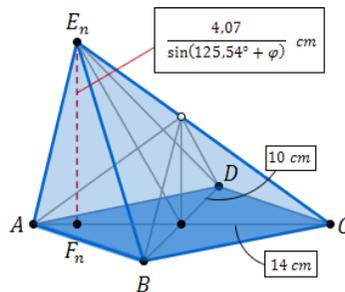
Erläuterung: Funktionswerte der Sinusfunktion

	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$	$360^\circ \pm \alpha$
sin	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
cos	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$

$$\Rightarrow \sin(90^\circ - \varphi) = \cos(\varphi)$$

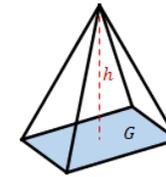
$$\overline{E_n F_n} = \overline{M E_n} \cdot \cos(\varphi)$$

Volumen einer Pyramide



Volumen der Pyramide $ABCDE_n$:

Erläuterung: Volumen einer Pyramide



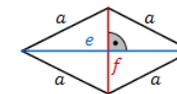
Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{ABCDE_n} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Erläuterung: Flächeninhalt einer Raute

Die Grundfläche $ABCD$ ist eine Raute.



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$V_{ABCDE_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}_G \cdot \underbrace{\overline{E_n F_n}}_h$$

$$V_{ABCDE_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}_G \cdot \underbrace{\overline{M E_n} \cdot \cos(\varphi)}_h$$

$$V_{ABCDE_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 10 \cdot \frac{4,07}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \cdot \cos \varphi$$

$$\Rightarrow V_{ABCDE_n} \approx \frac{94,97 \cdot \cos \varphi}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3$$

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Die Pyramide $ABCDE_2$ hat das Volumen 210 cm^3 .
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ .

Lösung zu Aufgabe B2.5**Winkel bestimmen**

Aus Teilaufgabe 2.4: $V_{ABCDE_n} \approx \frac{94,97 \cdot \cos \varphi}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm}^3$

Für die Pyramide $ABCDE_2$ gilt somit:

$$\frac{94,97 \cdot \cos \varphi}{\sin(125,54^\circ + \varphi)} = 210 \quad | \cdot \sin(125,54^\circ + \varphi)$$

$$94,97 \cdot \cos \varphi = 210 \cdot \sin(125,54^\circ + \varphi) \quad | \quad \text{Additionstheorem anwenden}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$94,97 \cdot \cos \varphi = 210 \cdot [\sin(125,54^\circ) \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos(125,54^\circ)]$$

Erläuterung: *Ausmultiplizieren*

Die rechte Seite der Gleichung wird ausmultipliziert.

$$94,97 \cdot \cos \varphi = 210 \cdot \sin(125,54^\circ) \cdot \cos \varphi + 210 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(125,54^\circ)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

Der Term $210 \cdot \sin(125,54^\circ) \cdot \cos \varphi$ wird auf die linke Seite der Gleichung gebracht.

$$94,97 \cdot \cos \varphi - 210 \cdot \sin(125,54^\circ) \cdot \cos \varphi = 210 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(125,54^\circ)$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der gemeinsame Term $\cos \varphi$ auf der linken Seite der Gleichung wird ausgeklammert.

$$[94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ)] \cdot \cos \varphi = 210 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(125,54^\circ) \quad | \quad : \underbrace{(\cos \varphi)}_{\neq 0}$$

Erläuterung: *Teilen*

Für den Winkel φ gilt: $\varphi \in]0^\circ; 54,56^\circ[$ (siehe Teilaufgabe 2.3)

Somit ist $\cos \varphi \neq 0$ und die Gleichung darf durch $\cos \varphi$ geteilt werden.

$$94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ) = 210 \cdot \cos(125,54^\circ) \cdot \underbrace{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}}_{\tan \varphi} \quad | \quad : \underbrace{(210 \cdot \cos(125,54^\circ))}_{\neq 0}$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels α gilt die Beziehung:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\tan \varphi = \frac{94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ)}{210 \cdot \cos(125,54^\circ)}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\tan \varphi = \frac{94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ)}{210 \cdot \cos(125,54^\circ)}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ)}{210 \cdot \cos(125,54^\circ)} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

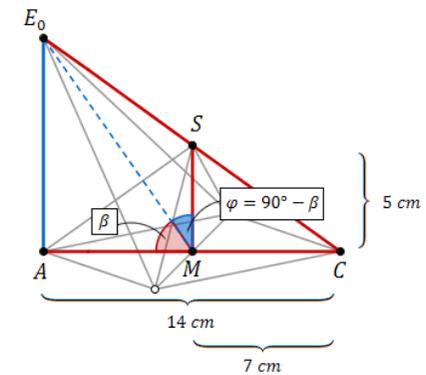
$$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{94,97 - 210 \cdot \sin(125,54^\circ)}{210 \cdot \cos(125,54^\circ)} \right) \approx 31,88^\circ$$

Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Die Spitze E_0 der Pyramide $ABCDE_0$ liegt senkrecht über dem Punkt A . Berechnen Sie das Maß φ des Winkels $SM E_0$.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Seite eines Dreiecks bestimmen

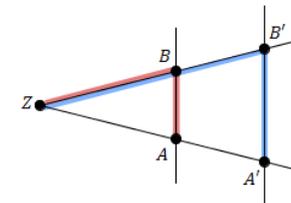


Betrachtet werden die Dreiecke E_0AC und SMC .

Laut Vierstreckensatz gilt:

Erläuterung: *Vierstreckensatz*

Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B. folgende Beziehung:



$$\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{AE_0}}$$

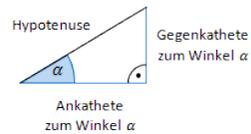
$$\frac{7}{14} = \frac{5}{\overline{AE_0}} \quad | \cdot \left(\overline{AE_0} \cdot \frac{14}{7} \right)$$

$$\Rightarrow \overline{AE_0} = \frac{14 \cdot 5}{7} = 10 \text{ cm}$$

Winkel bestimmen

Im rechtwinkligen Dreieck $E_0 A M$ gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \beta = \frac{\overline{AE_0}}{\overline{AM}} = \frac{10}{7}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel β aus $\tan \beta = \frac{10}{7}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{10}{7} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{10}{7} \right) \approx 55,01^\circ$$

$$\varphi = 90^\circ - \beta$$

$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ - 55,01^\circ = 34,99^\circ$$