

## Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik I Aufgabe B1

### Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = \log_2(x + 8) + 1$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion  $f$  sowie die Gleichung der Asymptote  $h$  an.

#### Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion  $f$  für  $x \in \{-7, 7; -7, 6; -7, -6; -5; -4; -2; 0; 2; 4\}$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Zeichnen Sie sodann den Graphen zu  $f$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-9 \leq x \leq 6$ ;  $-4 \leq y \leq 9$ .

#### Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Punkte  $A_n(x|\log_2(x+8)+1)$  auf dem Graphen zu  $f$  sind zusammen mit dem Punkt  $B(0|0)$  und Punkten  $C_n$  und  $D_n$  die Eckpunkte von Quadraten  $A_n B C_n D_n$ .

Zeichnen Sie die Quadrate  $A_1 B C_1 D_1$  für  $x = -5$  und  $A_2 B C_2 D_2$  für  $x = 1$  in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

#### Aufgabe B1.4 (5 Punkte)

Die Punkte  $A_n$  können auf die Punkte  $C_n$  abgebildet werden.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Trägergraph  $t$  der Punkte  $C_n$  die Gleichung  $y = -2^{x-1} + 8$  besitzt.

Zeichnen Sie den Trägergraphen  $t$  der Punkte  $C_n$  in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

[Teilergebnis:  $C_n(\log_2(x+8)+1 | -x)$  ]

#### Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Für das Quadrat  $A_3 B C_3 D_3$  gilt:  $A_3(-4|3)$ .

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $D_3$ .

#### Aufgabe B1.6 (3 Punkte)

Für das Quadrat  $A_4 B C_4 D_4$  gilt: Der Punkt  $D_4$  liegt auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten.

Ermitteln Sie rechnerisch die  $x$ -Koordinate des Punktes  $A_4$ .

## Lösung

### Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = \log_2(x + 8) + 1$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion  $f$  sowie die Gleichung der Asymptote  $h$  an.

#### Lösung zu Aufgabe B1.1

##### *Definitionsmenge einer Funktion*

$$f : y = \log_2(x + 8) + 1$$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion  $\log_2(x + 8)$  ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche  $x$ -Werte gilt:  $x + 8 > 0$ .

$$x + 8 > 0$$

$$x > -8$$

$$\Rightarrow D_f = ] - 8; \infty[$$

##### *Wertemenge einer Funktion*

$f$  ist eine Logarithmusfunktion.

$$\Rightarrow W_f = \mathbb{R}$$

##### *Asymptoten einer Funktion*

$$D_f = ] - 8; \infty[$$

$$\Rightarrow h : x = -8 \quad (\text{senkrechte Asymptote})$$

**Aufgabe B1.2** (3 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion  $f$  für  $x \in \{-7,7; -7,6; -7; -6; -5; -4; -2; 0; 2; 4\}$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Zeichnen Sie sodann den Graphen zu  $f$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-9 \leq x \leq 6$ ;  $-4 \leq y \leq 9$ .

**Lösung zu Aufgabe B1.2****Wertetabelle**

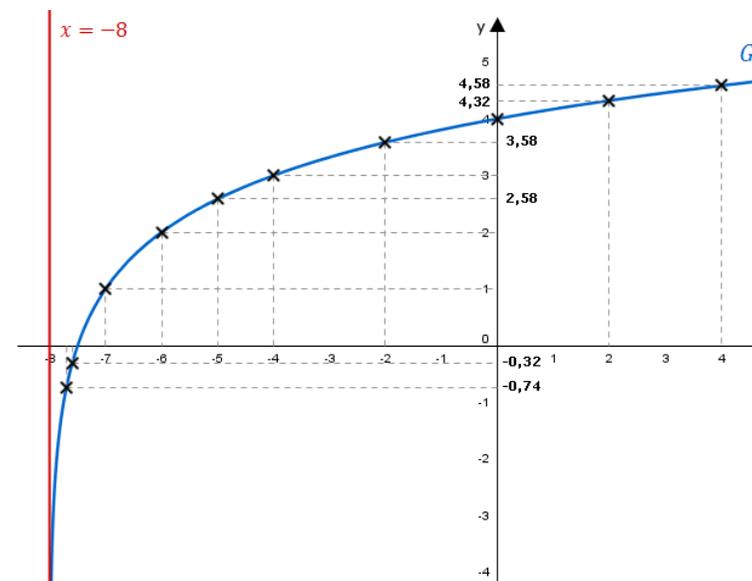
$$f : y = \log_2(x + 8) + 1$$

Wertetabelle für  $x \in \{-7,7; -7,6; -7; -6; -5; -4; -2; 0; 2; 4\}$  erstellen:

$x$	-7,7	-7,6	-7	-6	-5	-4	-2	0	2	4
$y = \log_2(x + 8) + 1$	-0,74	-0,32	1	2	2,58	3	3,58	4	4,32	4,58

**Skizze**

Graph  $G_f$  der Funktion  $f$ :

**Aufgabe B1.3** (2 Punkte)

Punkte  $A_n(x|\log_2(x+8)+1)$  auf dem Graphen zu  $f$  sind zusammen mit dem Punkt  $B(0|0)$  und Punkten  $C_n$  und  $D_n$  die Eckpunkte von Quadraten  $A_n B C_n D_n$ .

Zeichnen Sie die Quadrate  $A_1 B C_1 D_1$  für  $x = -5$  und  $A_2 B C_2 D_2$  für  $x = 1$  in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

**Lösung zu Aufgabe B1.3****Skizze**

$$A_n(x|\log_2(x+8)+1)$$

$$\text{Für } x = -5 \text{ ist } A_1(-5|\log_2(3)+1) = A_1(-5|2,58)$$

$$\text{Für } x = 1 \text{ ist } A_2(1|\log_2(9)+1) = A_2(1|4,17)$$

$$B(0|0)$$

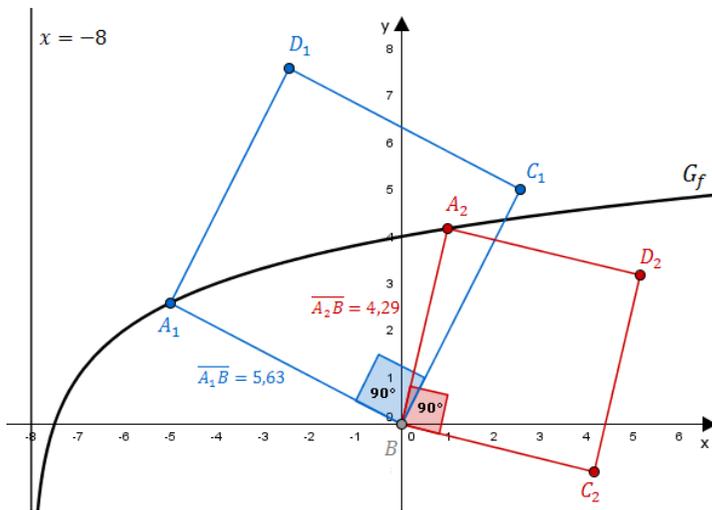
Quadrate  $A_1 B C_1 D_1$  und  $A_2 B C_2 D_2$  einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Um das Quadrat  $A_1 B C_1 D_1$  (und  $A_2 B C_2 D_2$ ) einzuzichnen, muss der Punkt  $A_1$  mit dem Punkt  $B$  verbunden werden.

Mit dem Lineal wird die Strecke  $\overline{A_1 B}$  gemessen (ca. 5,63 cm). Der Punkt  $C_1$  liegt dann 5,63 cm von  $B$  entfernt. Die Seite  $[B C_1]$  liegt senkrecht zu  $[A_1 B]$ .

Punkte werden entgegen dem Uhrzeigersinn eingezeichnet.



#### Aufgabe B1.4 (5 Punkte)

Die Punkte  $A_n$  können auf die Punkte  $C_n$  abgebildet werden.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Trägergraph  $t$  der Punkte  $C_n$  die Gleichung  $y = -2^{x-1} + 8$  besitzt.

Zeichnen Sie den Trägergraphen  $t$  der Punkte  $C_n$  in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.  
[Teilergebnis:  $C_n (\log_2(x+8) + 1 | -x)$  ]

#### Lösung zu Aufgabe B1.4

##### Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

$$A_n(x | \log_2(x+8))$$

Die Punkte  $C_n$  entstehen durch Drehung der Punkte  $A_n$  um  $\varphi = -90^\circ$  (Drehwinkel ist negativ, da die Drehrichtung im Uhrzeigersinn ist) um den Punkt  $B(0|0)$ .

Drehmatrix aufstellen:

$$D = \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Koordinaten der Punkte  $C_n$  bestimmen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \log_2(x+8) + 1 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log_2(x+8) + 1 \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_n(\log_2(8+x) + 1 | -x)$$

Funktion  $t$  des Trägergraphen bestimmen:

Erläuterung: *Trägergraphen*

Der Trägergraph besteht aus allen möglichen Punkten  $C_n$ , die durch die Drehung entstehen können.

Man stellt sich dies als Bewegung vor bei der der Punkt  $C_n$  betrachtet wird.

$x'' = \log_2(x+8) + 1$  nach  $x$  auflösen:

$$x'' = \log_2(x+8) + 1 \quad | \quad -1$$

$$x'' - 1 = \log_2(x+8) \quad | \quad \text{entlogarithmieren}$$

$$2^{x''-1} = 2^{\log_2(x+8)}$$

$$2^{x''-1} = x + 8 \quad | \quad -8$$

$$x = 2^{x''-1} - 8$$

$x = 2^{x''-1} - 8$  einsetzen in  $y''$ :

$$y'' = -x = -(2^{x''-1} - 8) = -2^{x''-1} + 8$$

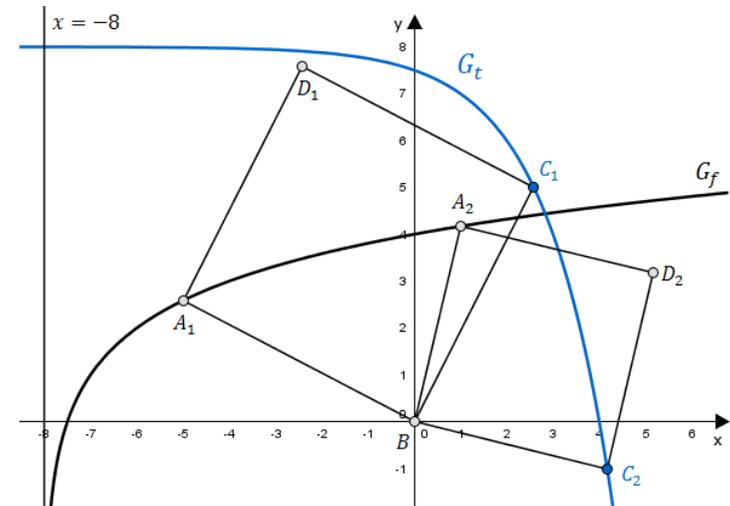
$$\Rightarrow \quad t : y = -2^{x-1} + 8$$

**Skizze**

Wertetabelle anfertigen:

$x$	-2	0	3
$y = -2^{x-1} + 8$	7,88	7,5	4

Trägergraph  $t$  in das Koordinatensystem zu 1.2 einzeichnen:



#### Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Für das Quadrat  $A_3 B C_3 D_3$  gilt:  $A_3(-4|3)$ .  
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $D_3$ .

#### Lösung zu Aufgabe B1.5

##### Lage eines Punktes

$$C_n(\log_2(x+8) + 1 | -x) \quad (\text{Teilergebnis von Aufgabe B 1.4})$$

$$A_3(-4|3)$$

Der Punkt  $A_3$  hat die  $x$ -Koordinate  $-4$ .

Koordinaten des Punktes  $C_3$  bestimmen:

$$C_3(\log_2(-4+8) + 1 | -(-4)) = (\log_2(4) + 1 | 4) = (3|4)$$

Koordinaten des Punktes  $D_3$  bestimmen:

$$\vec{D}_3 = \vec{A}_3 + \vec{C}_3$$

$$\vec{D}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_3(-1|7)$$

#### Aufgabe B1.6 (3 Punkte)

Für das Quadrat  $A_4 B C_4 D_4$  gilt: Der Punkt  $D_4$  liegt auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten.

Ermitteln Sie rechnerisch die  $x$ -Koordinate des Punktes  $A_4$ .

#### Lösung zu Aufgabe B1.6

##### *Lage eines Punktes*

$D_4$  liegt auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten.

Da der Punkt  $B$  im Ursprung und der Punkt  $D_4$  auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten liegt, folgt:

Der Punkt  $A_4$  liegt auf der  $x$ -Achse. Seine  $y$ -Koordinate ist somit gleich Null.

$$\Rightarrow A_4(x|0)$$

Für alle Punkte  $A_n$  gilt:  $A_n(x|\log_2(x+8)+1)$

Für den Punkt  $A_4$  gilt also:

$$\log_2(x+8)+1=0 \quad | \quad -1$$

$$\log_2(x+8)=-1 \quad | \quad \text{entlogarithmieren}$$

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus  $\log_2$  kann durch die Exponentialfunktion  $2^x$  aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } \log_2 x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\log_2 x} = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8$$

$$2^{\log_2(x+8)} = 2^{-1}$$

$$x+8 = 2^{-1} \quad | \quad -8$$

$$x = 2^{-1} - 8$$

$$\Rightarrow x = -7,5$$