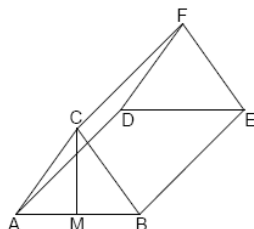


## Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik I Aufgabe B2

### Aufgabe B2.

Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild des geraden Prismas  $ABCDEF$ , dessen Grundfläche das gleichschenklige Dreieck  $ABC$  mit der Basis  $[AB]$  und der Höhe  $[MC]$ , ist.

Es gilt:  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ ;  $\overline{AD} = 12 \text{ cm}$ ;  $\overline{MC} = 4 \text{ cm}$ .



### Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas  $ABCDEF$ , wobei die Kante  $[AB]$  auf der Schrägbildachse liegen soll (Lage des Prismas wie in der Skizze zu 2.0 dargestellt).

Für die Zeichnung gilt:  $q = \frac{1}{2}$ ;  $\omega = 45^\circ$ .

Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels  $CBA$ .

[Ergebnis:  $\angle CBA = 57,99^\circ$ ]

### Aufgabe B2.2 (1 Punkt)

Punkte  $G_n \in [BC]$  und Punkte  $H_n \in [EF]$  sind zusammen mit den Punkten  $A$  und  $D$  die Eckpunkte von Rechtecken  $AG_nH_nD$ . Die Winkel  $BAG_n$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in [0^\circ; 57,99^\circ]$ .

Zeichnen Sie das Rechteck  $AG_1H_1D$  für  $\overline{BG_1} = \frac{1}{4}$  in das Schrägbild zu 2.1 ein.

### Aufgabe B2.3 (5 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt  $A$  der Rechtecke  $AG_nH_nD$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ . Ermitteln Sie sodann den minimalen und den maximalen Flächeninhalt mit dem jeweils zugehörigen Winkelmaß  $\varphi$ .

[Teilergebnis:  $\overline{AG_n}(\varphi) = \frac{4,24}{\sin(\varphi + 57,99^\circ)} \text{ cm}$ ]

### Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Die Rechtecke  $AG_2H_2D$  und  $AG_3H_3D$  haben jeweils den Flächeninhalt  $53 \text{ cm}^2$ . Berechnen Sie die zugehörigen Winkelmaße  $\varphi$ .

### Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen  $V$  der Prismen  $ABG_nDEH_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ .

[Ergebnis:  $V(\varphi) = \frac{127,20 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 57,99^\circ)} \text{ cm}^3$ ]

### Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

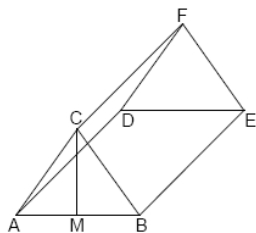
Das Volumen des Prismas  $ABG_4DEH_4$  beträgt 20% des Volumens des Prismas  $ABCDEF$ . Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ .

## Lösung

## Aufgabe B2.

Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild des geraden Prismas  $ABCDEF$ , dessen Grundfläche das gleichschenklige Dreieck  $ABC$  mit der Basis  $[AB]$  und der Höhe  $[MC]$ , ist.

Es gilt:  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ ;  $\overline{AD} = 12 \text{ cm}$ ;  $\overline{MC} = 4 \text{ cm}$ .



## Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas  $ABCDEF$ , wobei die Kante  $[AB]$  auf der Schrägbildachse liegen soll (Lage des Prismas wie in der Skizze zu 2.0 dargestellt).

Für die Zeichnung gilt:  $q = \frac{1}{2}$ ;  $\omega = 45^\circ$ .

Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels  $CBA$ .

[Ergebnis:  $\angle CBA = 57,99^\circ$ ]

## Lösung zu Aufgabe B2.1

## Skizze

Es soll das Schrägbild des geraden Prismas  $ABCDEF$  gezeichnet werden.

$$\overline{AB} = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = 12 \text{ cm}$$

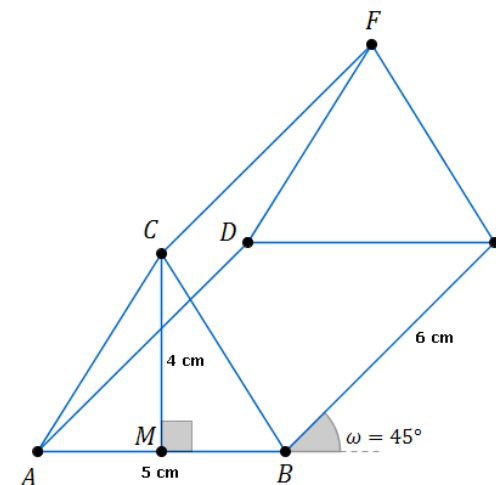
$$\overline{MC} = 4 \text{ cm}$$

$q = \frac{1}{2}$  ist der Faktor für die Diagonale im Schrägbild.

Für die Länge der Diagonalen im Schrägbild gilt somit:

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ cm}$$

Winkel der Diagonalen zur Schrägbildachse ist  $\omega = 45^\circ$



## Innenwinkel eines Dreiecks

Gesucht ist der Winkel  $\angle CBA$ .

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck  $CBM$ , da  $\angle CBA = \angle CBM$ .

Seitenlänge  $\overline{MB}$  bestimmen:

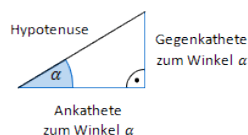
Erläuterung: *Gleichschenkliges Dreieck*

Das Dreieck  $ABC$  ist gleichschenkelig, somit teilt die Höhe  $[MC]$  die Basis  $[AB]$  in zwei gleich lange Seiten.

$$\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}$$

Winkel  $\angle CBM$  bestimmen:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \angle CBM = \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} = \frac{4}{2,5}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel  $\alpha$  aus  $\tan \alpha = \frac{4}{2,5}$  zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{4}{2,5} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$\Rightarrow \angle CBM = \tan^{-1} \left( \frac{4}{2,5} \right) \approx 57,99^\circ$$

### Aufgabe B2.2 (1 Punkte)

Punkte  $G_n \in [BC]$  und Punkte  $H_n \in [EF]$  sind zusammen mit den Punkten  $A$  und  $D$  die Eckpunkte von Rechtecken  $AG_n H_n D$ . Die Winkel  $BAG_n$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in [0^\circ; 57,99^\circ]$ .

Zeichnen Sie das Rechteck  $AG_1 H_1 D$  für  $\overline{BG_1} = \frac{1}{4}$  in das Schrägbild zu 2.1 ein.

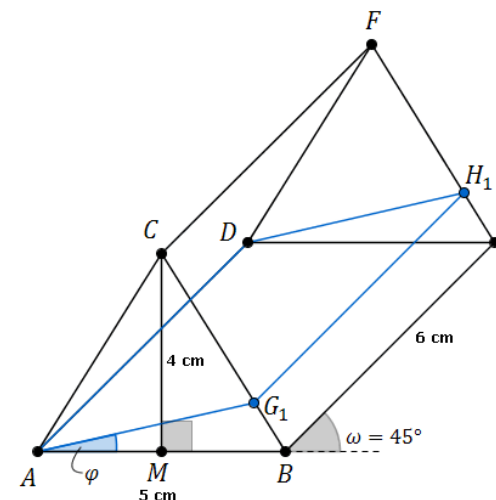
### Lösung zu Aufgabe B2.2

#### Skizze

Es soll das Viereck  $AG_1 H_1 D$  in das Schrägbild zu Aufgabe 2.1 für  $\overline{BG_1} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BC}$  eingezeichnet werden.

Erläuterung: *Einzeichnen*

Um den Punkt  $G_1$  zu markieren, misst man als erstes die Länge der Seite  $[BC]$  mit dem Lineal aus (ca. 4,7 cm) und teilt dann die gemessene Länge durch 4 (ca. 1,2 cm), da  $\overline{BG_1} = \frac{1}{4} \cdot \overline{BC}$  gelten soll.  $G_1$  hat dann diesen Abstand vom Punkt  $B$ .



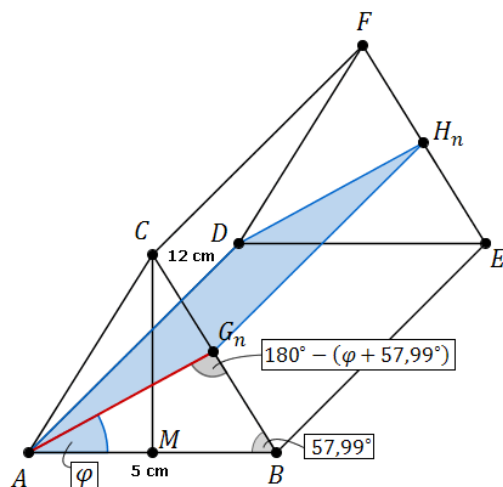
**Aufgabe B2.3** (5 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt  $A$  der Rechtecke  $AG_nH_nD$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ .  
Ermitteln Sie sodann den minimalen und den maximalen Flächeninhalt mit dem jeweils zugehörigen Winkelmaß  $\varphi$ .

$$[\text{Teilergebnis: } \overline{AG_n}(\varphi) = \frac{4,24}{\sin(\varphi + 57,99^\circ)} \text{ cm}]$$

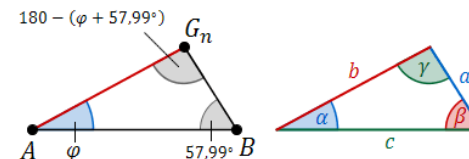
Lösung zu Aufgabe B2.3**Flächeninhalt eines Dreiecks**

Gesucht ist der Flächeninhalt des Rechtecks  $AG_nH_nD$ .  
Aus der Einleitung ist die Seitenlänge  $\overline{AD} = 12 \text{ cm}$  und  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$  bekannt. Aus Aufgabe 2.1 der Winkelmaß  $\angle CBA = 57,99^\circ$ . Der Winkel  $\angle BAG_n$  wird mit  $\varphi$  bezeichnet.



Seitenlänge  $\overline{AG_n}$  bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck  $AG_nB$  gilt somit:

$$\frac{\overline{AG_n}}{\sin \angle G_nBA} = \frac{\overline{AB}}{\sin \angle AG_nB} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\overline{AG_n}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \angle G_nBA}{\sin \angle AG_nB}$$

$$\frac{\overline{AG_n}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \angle G_nBA}{\sin \angle AG_nB}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

Also hat der Winkel  $\angle AG_nB$  eine Größe von  $180^\circ - (57,99^\circ + \varphi)$ .

$$\frac{\overline{AG_n}}{\overline{AB}} = \frac{\sin 57,99^\circ}{\sin [180^\circ - (57,99^\circ + \varphi)]}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

Aus dem Additionstheorem  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ , folgt:

$$\sin(180^\circ - \beta) = \underbrace{\sin 180^\circ}_0 \cdot \cos \beta - \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} \sin \beta = \sin \beta$$

$$\frac{\overline{AG_n}}{5} = \frac{\sin 57,99^\circ}{\sin (57,99^\circ + \varphi)} \quad | \quad \cdot 5$$

$$\overline{AG_n} = \frac{4,24}{\sin (57,99^\circ + \varphi)}$$

Flächeninhalt des Rechtecks  $AG_n H_n D$  bestimmen:

$$A_{AG_n H_n D} = \overline{AD} \cdot \overline{AG_n}$$

$$A_{AG_n H_n D} = 12 \cdot \frac{4,24}{\sin (57,99^\circ + \varphi)}$$

$$\Rightarrow A_{AG_n H_n D} = \frac{50,88}{\sin (57,99^\circ + \varphi)} \text{ (cm}^2\text{)}$$

### Extremwertaufgabe

Gesucht ist der minimale und maximale Flächeninhalt  $A_{AG_n H_n D}$  mit dem jeweils zugehörigen Winkelmaß  $\varphi$ .

$$A_{AG_n H_n D} = \frac{50,88}{\sin (57,99^\circ + \varphi)}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

Die Größe der Fläche  $A_{AG_n H_n D}$  wird durch einen Bruch dargestellt. Je größer der Zähler  $\sin(57,99^\circ + \varphi)$  ist, desto kleiner der Wert des Bruches. Da der Sinus eines Winkels maximal den Wert 1 haben kann, ist der Flächeninhalt minimal wenn gilt:

$$\sin(57,99^\circ + \varphi) = 1$$

Der Flächeninhalt ist minimal wenn  $\sin (57,99^\circ + \varphi) = 1$  ist.

$$\Rightarrow A_{min} = \frac{50,88}{1} = 50,88 \text{ cm}^2$$

Zugehöriges Winkelmaß  $\varphi$  bestimmen:

$$\sin (57,99^\circ + \varphi) = 1$$

$$\sin (57,99^\circ + \varphi) = \sin 90^\circ$$

$$57,99^\circ + \varphi = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 32,01^\circ$$

Erläuterung:

Das Viereck  $AG_n H_n D$  hat maximalen Inhalt, wenn es denselben Inhalt hat wie das Viereck  $ABED$ . Das ist der Fall, wenn  $\varphi = 0$  ist.

Der Flächeninhalt ist maximal wenn  $\varphi = 0$  ist.

$$\Rightarrow A_{max} = \frac{50,88}{\sin 57,99^\circ} = 60 \text{ cm}^2$$

### Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Die Rechtecke  $AG_2 H_2 D$  und  $AG_3 H_3 D$  haben jeweils den Flächeninhalt  $53 \text{ cm}^2$ . Berechnen Sie die zugehörigen Winkelmaße  $\varphi$ .

### Lösung zu Aufgabe B2.4

#### Winkel bestimmen

Gegeben ist der Flächeninhalt von  $53 \text{ cm}^2$  der Rechtecke  $AG_2 H_2 D$  und  $AG_3 H_3 D$ . Gesucht sind die zugehörigen Winkelmaße  $\varphi$ .

Aus Teilaufgabe B 2.3 ist der Flächeninhalt eines Rechtecks  $AG_n H_n D$  gegeben durch

$$A = \frac{50,88}{\sin (57,99^\circ + \varphi)}.$$

Winkelmaße bestimmen:

$$\frac{50,88}{\sin (57,99^\circ + \varphi)} = 53$$

$$\sin (57,99^\circ + \varphi) = \frac{50,88}{53}$$

$$57,99^\circ + \varphi = \sin^{-1} \left( \frac{50,88}{53} \right)$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel  $57,99^\circ + \varphi$  aus  $\sin(57,99^\circ + \varphi) = \frac{50,88}{53}$  zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{50,88}{53} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \sin$$

$$57,99^\circ + \varphi_1 = 73,74^\circ \Rightarrow \varphi_1 = 15,75^\circ$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

Es gibt immer 2 Winkel mit demselben Sinuswert.

Der Taschenrechner berechnet bei der Eingabe von  $\frac{50,88}{53} \rightarrow \text{SHIFT}$   
 $\rightarrow \sin$  das Ergebnis von  $\varphi_1 = 73,74^\circ$ .

Dieser Winkel liegt im ersten Quadranten. Für den Winkel im zweiten Quadranten  $\varphi_2$  mit demselben Sinuswert, gilt:

$$\varphi_2 = 180^\circ - \varphi_1 = 180^\circ - 73,74^\circ = 106,26^\circ$$

$$57,99^\circ + \varphi_2 = 106,26^\circ \Rightarrow \varphi_2 = 48,27^\circ$$

### Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

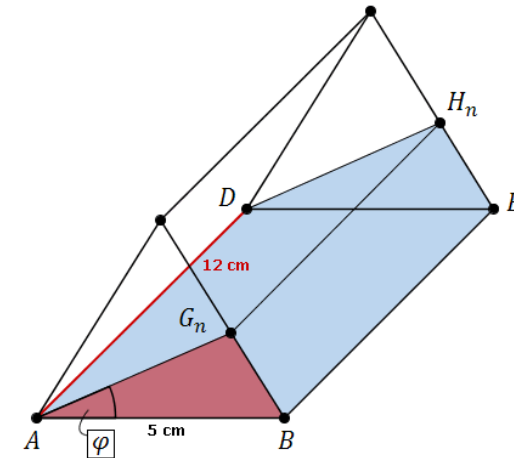
Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen  $V$  der Prismen  $ABG_nDEH_n$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{127,20 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 57,99^\circ)} \text{ cm}^3]$$

### Lösung zu Aufgabe B2.5

#### Volumen eines Prismas

Gesucht ist das Volumen des Prismas  $ABG_nDEH_n$  mit Grundfläche das Dreieck  $AG_nB$  und Höhe die Seite  $[AD]$ .

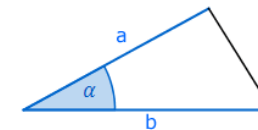


Gegeben sind  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$  und  $\overline{AD} = 12 \text{ cm}$  aus der Einleitung und  $\overline{AG_n} = \frac{4,24}{\sin(57,99^\circ + \varphi)}$  aus Teilaufgabe 2.3.

Volumen bestimmen:

$$V = G \cdot h \quad (\text{Grundfläche mal Höhe})$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck  $ABC$  zwei Seiten  $a$  und  $b$  und der Winkel  $\alpha$ , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt  $A$  des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AG_n} \cdot \sin \varphi \cdot \overline{AD}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{4,24}{\sin(57,99^\circ + \varphi)} \cdot \sin \varphi \cdot 12$$

$$\Rightarrow V = \frac{127,20 \cdot \sin \varphi}{\sin(57,99^\circ + \varphi)}$$

**Aufgabe B2.6** (4 Punkte)

Das Volumen des Prismas  $ABG_4DEH_4$  beträgt 20% des Volumens des Prismas  $ABCDEF$ . Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ .

Lösung zu Aufgabe B2.6**Volumen eines Prismas**

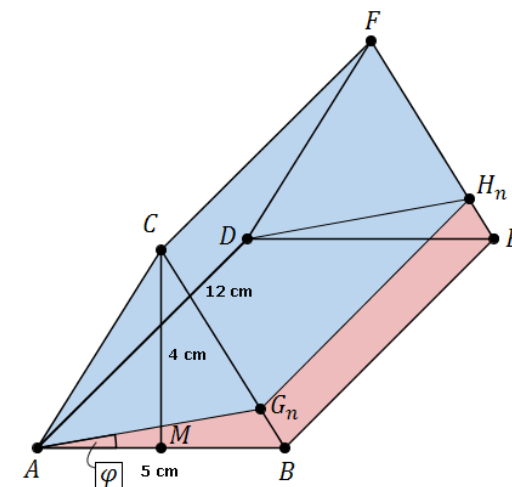
Aus der Einleitung sind gegeben:  $\overline{AB} = 5$  cm,  $\overline{AD} = 12$  cm und  $\overline{MC} = 4$  cm.

Das Volumen des Prismas  $ABG_4DEH_4$  beträgt 20% des Volumens des Prismas  $ABCDEF$ .

Aus Teilaufgabe B 2.5 ist bekannt, dass das Volumen eines Prismas  $ABG_nDEH_n$  durch

$$V(\varphi) = \frac{127,20 \cdot \sin \varphi}{\sin(\varphi + 57,99^\circ)} \text{ (cm}^3\text{)} \text{ gegeben ist.}$$

Gesucht ist das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ .



Diese Aufgabe kann in 4 Schritten aufgeteilt werden:

1. Volumen des Prismas  $ABCDEF$  bestimmen.
2. Volumen des Prismas  $ABG_4DEH_4$  bestimmen.
3. Gleichsetzen der Volumina.
4. Auflösen der Gleichung nach  $\varphi$ .

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$127,20 \cdot \sin \varphi = 24 \cdot [\sin \varphi \cdot \cos(57,99^\circ) + \cos \varphi \cdot \sin(57,99^\circ)]$$

$$127,20 \cdot \sin \varphi = 24 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(57,99^\circ) + 24 \cdot \cos \varphi \cdot \sin(57,99^\circ) \quad | -24 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(57,99^\circ)$$

$$127,20 \cdot \sin \varphi - 24 \cdot \sin \varphi \cdot \cos(57,99^\circ) = 24 \cdot \cos \varphi \cdot \sin(57,99^\circ) \quad | \sin \varphi \text{ ausklammern}$$

$$\sin \varphi \cdot (127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)) = 24 \cdot \cos \varphi \cdot \sin(57,99^\circ) \quad | : \cos \varphi$$

(teilen durch  $\cos \varphi$  ist erlaubt, da  $\cos \varphi = 0$  nur für  $\varphi = 90^\circ$  bzw.  $\varphi = 270^\circ$  aber  $\varphi \in [0^\circ; 57,99^\circ]$ )

$$\underbrace{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}}_{\tan \varphi} \cdot (127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)) = 24 \cdot \sin(57,99^\circ) \quad | : (127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ))$$

$$\tan \varphi = \frac{24 \cdot \sin(57,99^\circ)}{127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)}$$
$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{24 \cdot \sin(57,99^\circ)}{127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)} \right)$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel  $\varphi$  aus  $\tan \varphi = \frac{24 \cdot \sin(57,99^\circ)}{127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)}$  zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR:  $\frac{24 \cdot \sin(57,99^\circ)}{127,20 - 24 \cdot \cos(57,99^\circ)} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$

$$\Rightarrow \varphi = 10,08^\circ$$