

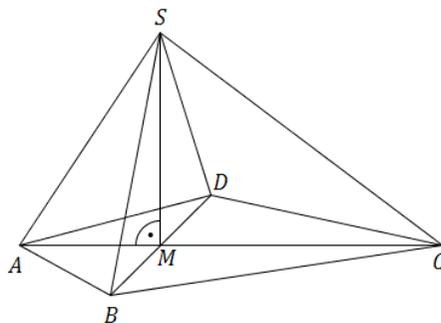
Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik II Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide $ABCD S$, deren Grundfläche das Drachenviereck $ABCD$ mit der Geraden AC als Symmetrieachse ist.

Die Spitze S der Pyramide $ABCD S$ liegt senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt M des Drachenvierecks $ABCD$.

Es gilt: $\overline{AC} = 12$ cm ; $\overline{BD} = 8$ cm ; $\overline{AM} = 4$ cm ; $\overline{CS} = 10$ cm .



Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (4 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCD S$, wobei die Strecke $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[MS]$ und das Maß des Winkels SCM .

[Ergebnisse: $\overline{MS} = 6$ cm ; $\angle SCM = 36,87^\circ$]

Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Der Punkt $R \in [MS]$ mit $\overline{MR} = 1,5$ cm ist der Mittelpunkt der Strecke $[FG]$ mit $F \in [BS]$ und $G \in [DS]$. Es gilt: $FG \parallel BD$.

Zeichnen Sie die Strecke $[FG]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein und berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[FG]$.

[Ergebnis: $\overline{FG} = 6$ cm]

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Die Punkte F und G sind zusammen mit dem Punkt $E \in [AS]$ die Eckpunkte des Dreiecks $EF G$, wobei gilt: $ER \parallel AM$.

Zeichnen Sie das Dreieck $EF G$ in das Schrägbild zu 2.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide $EF GS$ am Volumen der Pyramide $ABDS$.

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[CS]$, wobei die Winkel $SP_n R$ das Maß φ haben mit $\varphi \in]26,25^\circ; 126,87^\circ[$.

Zeichnen Sie das Dreieck P_1SR für $\varphi = 100^\circ$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[RP_1]$ und den Flächeninhalt des Dreiecks P_1SR .

[Ergebnis: $\overline{RP_1} = 3,66$ cm]

Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Der Abstand des Punktes P_2 von der Geraden AC ist 3 cm.

Zeichnen Sie den Punkt P_2 in das Schrägbild zu 2.1 ein und berechnen Sie sodann das Maß des Winkels SP_2R .

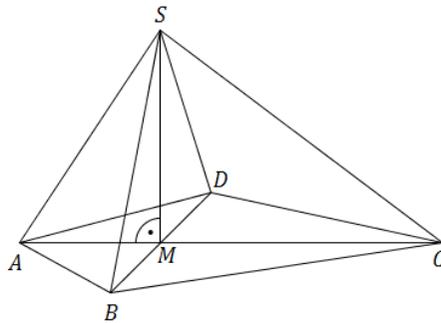
Lösung

Aufgabe B2.

Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide $ABCD S$, deren Grundfläche das Drachenviereck $ABCD$ mit der Geraden AC als Symmetrieachse ist.

Die Spitze S der Pyramide $ABCD S$ liegt senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt M des Drachenvierecks $ABCD$.

Es gilt: $\overline{AC} = 12$ cm ; $\overline{BD} = 8$ cm ; $\overline{AM} = 4$ cm ; $\overline{CS} = 10$ cm .



Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (4 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCD S$, wobei die Strecke $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[MS]$ und das Maß des Winkels SCM .

[Ergebnisse: $\overline{MS} = 6$ cm ; $\angle SCM = 36,87^\circ$]

Lösung zu Aufgabe B2.1*Skizze*

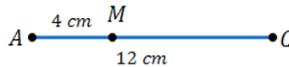
Schrägbild der Pyramide $ABCD S$:

$$q = \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \text{ cm}$$

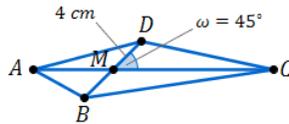
Erläuterung: *Erläuterung*

Entstehung der Zeichnung:

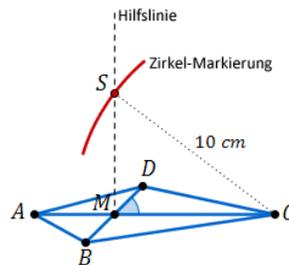
1. Ausgehend von $[AC]$ (12 cm), wird der Punkt M , der 4 cm vom Punkt A liegt, eingezeichnet.



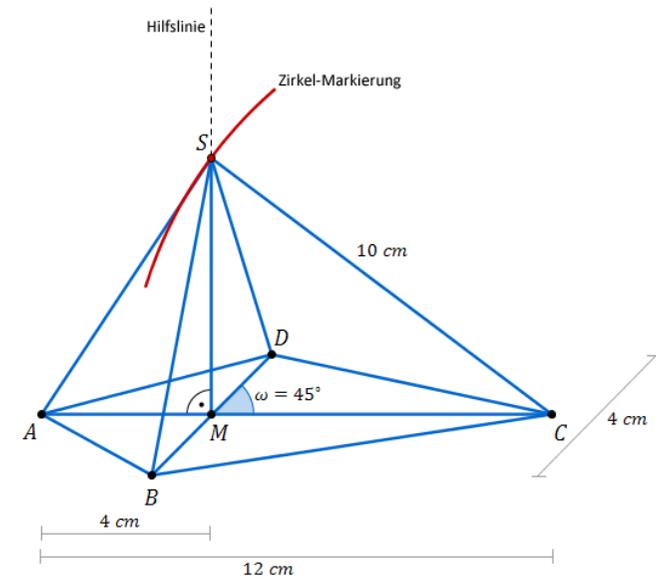
2. Mit einem Winkel von 45° zu $[AC]$ wird dann die Strecke $[BD]$ eingezeichnet. Sie ist wegen $q = \frac{1}{2} \cdot 4$ cm lang, geht durch M und wird durch $[AC]$ halbiert (M ist Diagonalschnittpunkt des Drachenvierecks $ABCD$). Es entsteht das Drachenviereck $ABCD$.



3. Der Punkt S liegt senkrecht über den Punkt M . Eine zu $[AC]$ senkrechte Hilfslinie markiert den Ort wo S eingezeichnet wird. Ausgehend vom Punkt C wird mit einem Zirkel, der um 10 cm geöffnet ist ($[CS]$ ist 10 cm lang), die Schnittstelle mit der Hilfslinie markiert. Der Schnittpunkt entspricht dem Punkt S .



4. Die Eckpunkte des Drachenvierecks werden mit der Spitze S verbunden.



Seite eines Dreiecks bestimmen

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck SMC .

Länge der Seite $[MS]$ mit dem Satz des Pythagoras bestimmen:

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{MS}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{CS}^2$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Für die Länge der Seite $[MC]$ gilt: $\overline{MC} = \overline{AC} - \overline{AM} = 12 - 4 = 8$ cm

$$\overline{MS}^2 + 8^2 = 10^2 \quad | \quad -8^2$$

$$\overline{MS}^2 = 10^2 - 8^2 \quad | \quad \text{Wurzel ziehen}$$

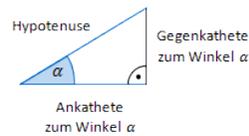
$$\overline{MS} = \sqrt{10^2 - 8^2}$$

$$\Rightarrow \overline{MS} = 6 \text{ cm}$$

Winkel bestimmen

Winkel $\angle SCM$ bestimmen:

Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos \angle SCM = \frac{\overline{MC}}{\overline{CS}} = \frac{8}{10}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\angle SCM$ aus $\cos \angle SCM = \frac{8}{10}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{8}{10} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \cos$$

$$\Rightarrow \angle SCM = \cos^{-1} \left(\frac{8}{10} \right) \approx 36,87^\circ$$

Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

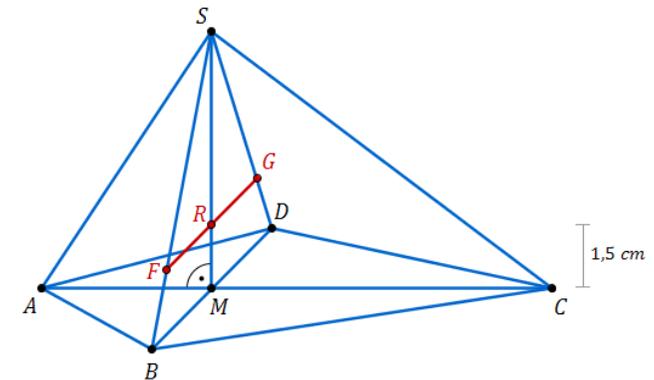
Der Punkt $R \in [MS]$ mit $\overline{MR} = 1,5 \text{ cm}$ ist der Mittelpunkt der Strecke $[FG]$ mit $F \in [BS]$ und $G \in [DS]$. Es gilt: $FG \parallel BD$.

Zeichnen Sie die Strecke $[FG]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein und berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[FG]$.

[Ergebnis: $\overline{FG} = 6 \text{ cm}$]

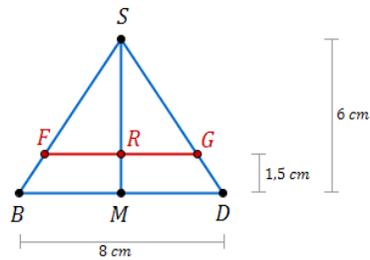
Lösung zu Aufgabe B2.2

Skizze



Seite eines Dreiecks bestimmen

Aus der vorherigen Teilaufgabe ist bekannt: $\overline{BD} = 8 \text{ cm}$ und $\overline{MS} = 6 \text{ cm}$.

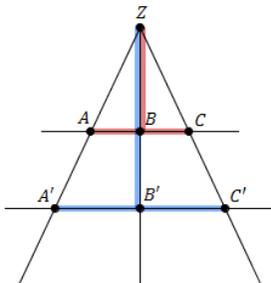


$$\overline{RS} = \overline{MS} - \overline{MR} = 6 - 1,5 = 4,5$$

Länge der Seite $[FG]$ mit Hilfe des Vierstreckensatzes ermitteln:

Erläuterung: *Vierstreckensatz*

Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B folgende Beziehung:



$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{ZB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{ZB}}$$

In diesem Fall gilt also:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{MS}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{RS}}$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{MS}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{RS}}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{\overline{FG}}{4,5} \quad | \cdot 4,5$$

$$\overline{FG} = \frac{8}{6} \cdot 4,5$$

$$\Rightarrow \overline{FG} = 6 \text{ cm}$$

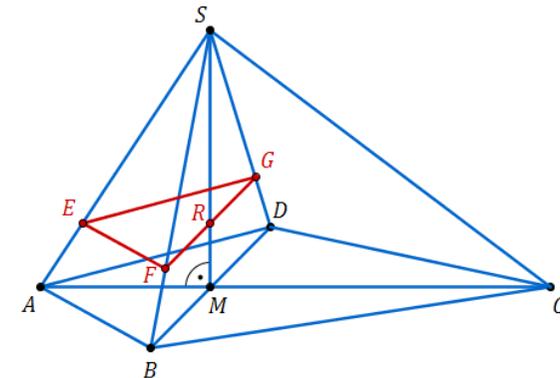
Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Die Punkte F und G sind zusammen mit dem Punkt $E \in [AS]$ die Eckpunkte des Dreiecks EFG , wobei gilt: $ER \parallel AM$.

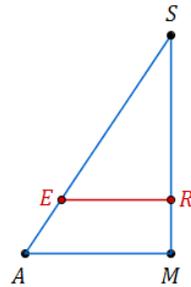
Zeichnen Sie das Dreieck EFG in das Schrägbild zu 2.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide $EFGS$ am Volumen der Pyramide $ABDS$.

Lösung zu Aufgabe B2.3

Skizze



Seite eines Dreiecks bestimmen

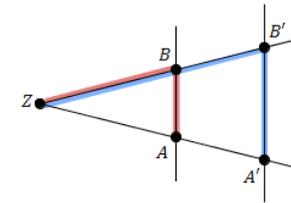


Aus den vorherigen Teilaufgaben ist bekannt:

$$\overline{AM} = 4 \text{ cm} ; \overline{MS} = 6 \text{ cm} ; \overline{RS} = 4,5 \text{ cm}$$

Länge der Seite $[ER]$ mit dem Vierstreckensatz bestimmen:

Erläuterung: Vierstreckensatz



Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten zwischen den Strecken folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} &= \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}} \\ 2. \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} &= \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} \end{aligned}$$

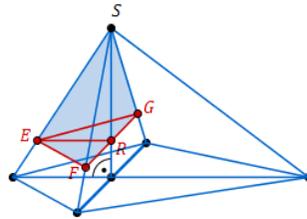
In diesem Fall (wenn S der Punkt ist, aus dem der Strahl kommt) gilt nach 2):

$$\frac{\overline{ER}}{\overline{RS}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MS}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{ER}}{\overline{RS}} &= \frac{\overline{AM}}{\overline{MS}} \\ \frac{\overline{ER}}{4,5} &= \frac{4}{6} \quad | \cdot 4,5 \\ \overline{ER} &= \frac{4}{6} \cdot 4,5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{ER} = 3 \text{ cm}$$

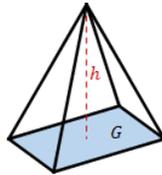
Volumen einer Pyramide



Aus den vorherigen Teilaufgaben ist bekannt: $\overline{FG} = 6 \text{ cm}$

Volumen der Pyramide $EFGS$ bestimmen:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

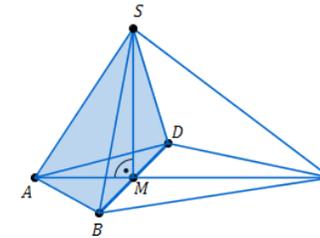
In diesem Fall ist das gleichschenklige Dreieck EFG die Grundfläche und die Strecke $[RS]$ die Höhe der Pyramide $EFGS$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{EFGS} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \overline{FG} \cdot \overline{ER}}_G \cdot \underbrace{\overline{RS}}_h$$

$$V_{EFGS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4,5$$

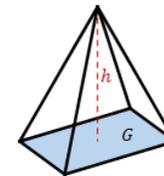
$$\Rightarrow V_{EFGS} = 13,5 \text{ cm}^3$$



Aus den vorherigen Teilaufgaben ist bekannt: $\overline{BD} = 8 \text{ cm}$

Volumen der Pyramide $ABDS$ bestimmen:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

In diesem Fall ist das gleichschenklige ($ABCD$ ist ein Drachenviereck) Dreieck ABD die Grundfläche und die Strecke $[MS]$ die Höhe der Pyramide $ABDS$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{ABDS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\overline{BD} \cdot \overline{AM}}_G \cdot \underbrace{\overline{MS}}_h$$

$$V_{ABDS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot 6$$

$$\Rightarrow V_{ABDS} = 32 \text{ cm}^3$$

Verhältnis der Rauminhalte von Teilkörpern

Prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide $EFGS$ am Volumen der Pyramide $ABDS$ bestimmen:

$$\frac{V_{EFGS}}{V_{ABDS}} = \frac{13,5 \text{ cm}^3}{32 \text{ cm}^3} \approx 0,42$$

\Rightarrow Der Anteil beträgt ca. 42%.

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[CS]$, wobei die Winkel $\angle SP_nR$ das Maß φ haben mit $\varphi \in]26,25^\circ; 126,87^\circ[$.

Zeichnen Sie das Dreieck P_1SR für $\varphi = 100^\circ$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[RP_1]$ und den Flächeninhalt des Dreiecks P_1SR .

[Ergebnis: $\overline{RP_1} = 3,66 \text{ cm}$]

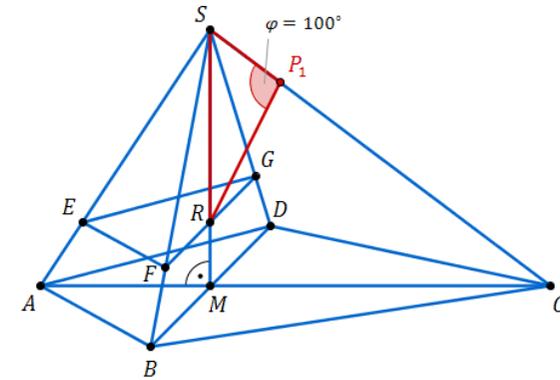
Lösung zu Aufgabe B2.4

Skizze

Dreieck P_1SR eintragen:

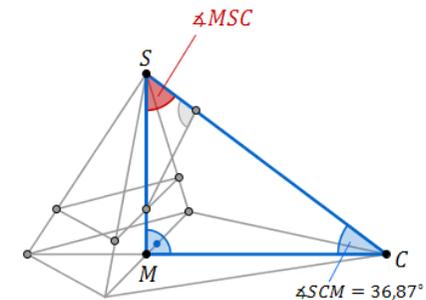
Erläuterung: *Erläuterung*

Um den Punkt P_1 präzise markieren zu können, muss der Winkel $\angle P_1RS$ zuvor bestimmt werden (siehe kommende Berechnungen).



Winkel bestimmen

Benötigte Angaben aus den vorherigen Teilaufgaben: $\angle SCM = 36,87^\circ$; $\overline{RS} = 4,5 \text{ cm}$



Im rechtwinkligen Dreieck CMS gilt:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

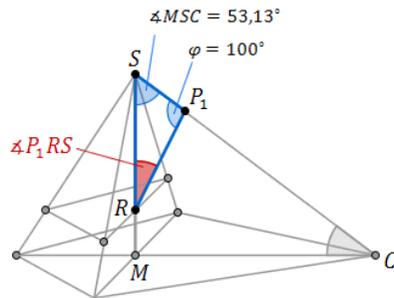
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Also hat der Winkel $\angle MSC$ eine Größe von $180^\circ - (90^\circ + \angle SCM)$.

$$\angle MSC = 180^\circ - (90^\circ + \angle SCM)$$

$$\angle MSC = 180^\circ - (90^\circ + 36,87^\circ)$$

$$\Rightarrow \angle MSC = 53,13^\circ$$



Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Also hat der Winkel $\angle P_1RS$ eine Größe von $180^\circ - (\varphi + \underbrace{\angle RSP_1}_{=\angle MSC})$.

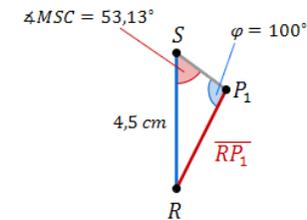
Im Dreieck P_1SR gilt dann:

$$\angle P_1RS = 180^\circ - (\varphi + \underbrace{\angle RSP_1}_{=\angle MSC})$$

$$\angle P_1RS = 180^\circ - (100^\circ + 53,13)$$

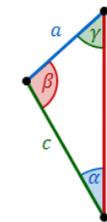
$$\Rightarrow \angle P_1RS = 26,87^\circ$$

Seite eines Dreiecks bestimmen



Länge der Seite $[RP_1]$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

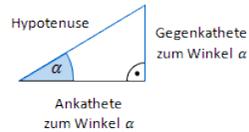
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck P_1SR gilt somit: $\frac{\overline{RP_1}}{\sin \angle MSC} = \frac{\overline{RS}}{\sin \varphi}$

$$\frac{\overline{RP_1}}{\sin \angle MSC} = \frac{\overline{RS}}{\sin \varphi}$$

$$\frac{\overline{RP_1}}{\sin 53,13^\circ} = \frac{4,5}{\sin 100^\circ} \quad | \cdot \sin 53,13^\circ$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin \angle S C M = \frac{\overline{P_2 H}}{\overline{P_2 C}} \Rightarrow \overline{P_2 C} = \frac{\overline{P_2 H}}{\sin \angle S C M}$$

$$\overline{P_2 C} = \frac{3}{\sin 36,87^\circ}$$

$$\Rightarrow \overline{P_2 C} = 5 \text{ cm}$$

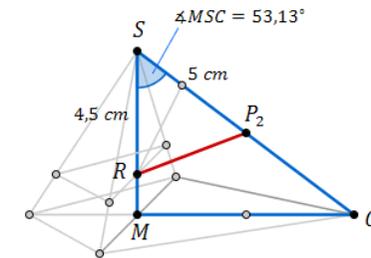
Länge der Strecke $[S P_2]$:

$$\overline{S P_2} = \overline{S C} - \overline{P_2 C}$$

$$\Rightarrow \overline{S P_2} = 10 - 5 = 5 \text{ cm}$$

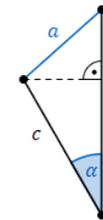
Länge der Strecke $[R P_2]$:

Betrachtet wird das Dreieck $S R P_2$:



Länge der Strecke $[R P_2]$ mit dem Kosinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

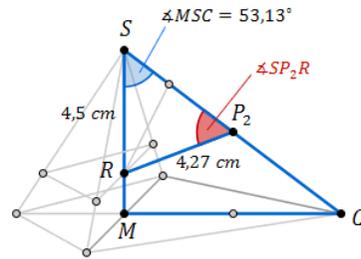
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{R P_2}^2 = \overline{R S}^2 + \overline{S P_2}^2 - 2 \cdot \overline{R S} \cdot \overline{S P_2} \cdot \cos \underbrace{\angle R S P_2}_{\angle M S C}$$

$$\overline{R P_2} = \sqrt{4,5^2 + 5^2 - 2 \cdot 4,5 \cdot 5 \cdot \cos 53,13^\circ}$$

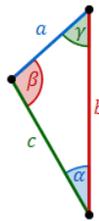
$$\Rightarrow \overline{R P_2} \approx 4,27 \text{ cm}$$

Winkel bestimmen



Winkel $\angle S P_2 R$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck $R S P_2$ gilt somit:
$$\frac{\overline{RS}}{\sin \angle S P_2 R} = \frac{\overline{R P_2}}{\sin \angle R S P_2}$$

$$\frac{\overline{RS}}{\sin \angle S P_2 R} = \frac{\overline{R P_2}}{\sin \angle R S P_2}$$

$$\frac{4,5}{\sin \angle S P_2 R} = \frac{4,27}{\sin 53,13^\circ}$$

$$\sin \angle S P_2 R = \frac{4,5 \cdot \sin 53,13^\circ}{4,27}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\angle S P_2 R$ aus $\sin \angle S P_2 R = \frac{4,5 \cdot \sin 53,13^\circ}{4,27}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{4,5 \cdot \sin 53,13^\circ}{4,27} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \sin$$

$$\angle S P_2 R = \sin^{-1} \left(\frac{4,5 \cdot \sin 53,13^\circ}{4,27} \right)$$

$$\Rightarrow \angle S P_2 R \approx 57,47^\circ$$