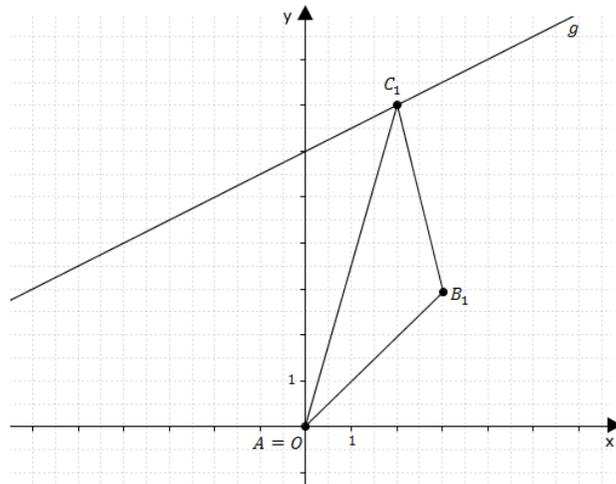


Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Der Punkt $A(0|0)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von gleichschenkligen Dreiecken AB_nC_n , wobei die Punkte $C_n \left(x \mid \frac{1}{2}x + 6\right)$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 6$ liegen ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Die Basiswinkel B_nAC_n und AC_nB_n der Dreiecke AB_nC_n haben das Maß 30° .



Aufgabe A2.1 (1 Punkt)

In das Koordinatensystem zu 2.0 ist das Dreieck AB_1C_1 für $x = 2$ eingezeichnet. Zeichnen Sie das Dreieck AB_2C_2 für $x = -3$ ein.

Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für das Längenverhältnis der Strecken $[AB_n]$ und $[AC_n]$ gilt:

$$\overline{AB_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{AC_n}.$$

Bestätigen Sie sodann durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke AB_nC_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n gilt:

$$A(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot (1,25x^2 + 6x + 36) \quad \text{FE}$$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken AB_nC_n hat das Dreieck AB_0C_0 den minimalen Flächeninhalt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_0 .

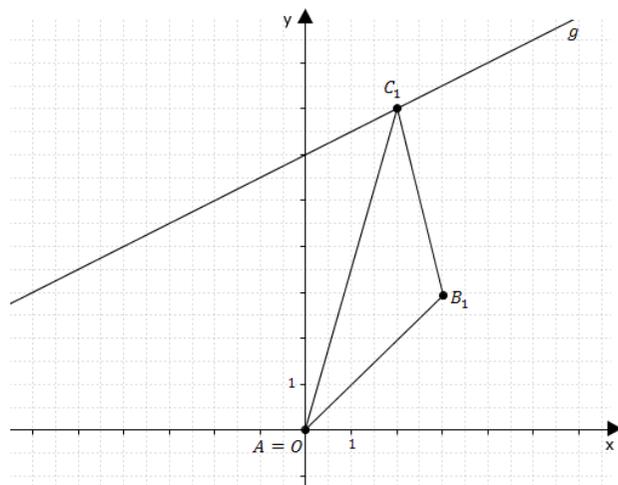
Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe A2.

Der Punkt $A(0|0)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von gleichschenkligen Dreiecken AB_nC_n , wobei die Punkte $C_n \left(x \mid \frac{1}{2}x + 6\right)$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 6$ liegen ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Die Basiswinkel B_nAC_n und AC_nB_n der Dreiecke AB_nC_n haben das Maß 30° .



Aufgabe A2.1 (1 Punkte)

In das Koordinatensystem zu 2.0 ist das Dreieck AB_1C_1 für $x = 2$ eingezeichnet. Zeichnen Sie das Dreieck AB_2C_2 für $x = -3$ ein.

Lösung zu Aufgabe A2.1

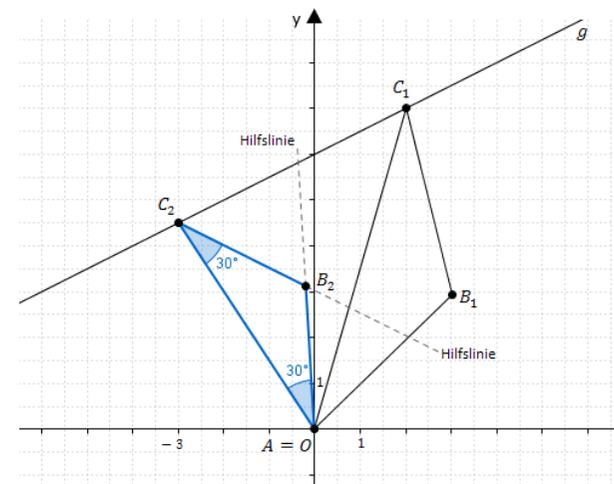
Skizze

Dreieck AB_2C_2 für $x = -3$ einzeichnen:

Erläuterung: *Erläuterung*

C_2 entspricht dem Punkt auf der Geraden g mit der Abszisse $x = -3$. Durch das Verbinden der Punkte C_2 und A erhält man die Seite $[C_2A]$ des Dreiecks.

Durch das Einzeichnen von Hilfslinien die durch die Punkte A und C_2 gehen, die jeweils einen Winkel von 30° mit der Seite $[C_2A]$ bilden, kann der Punkt B_2 ermittelt werden. Er entspricht dem Schnittpunkt der Hilfslinien.



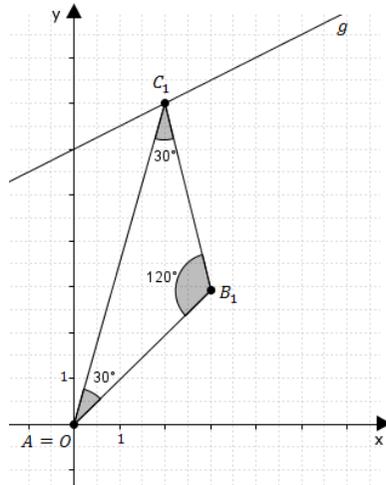
Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für das Längenverhältnis der Strecken $[AB_n]$ und $[AC_n]$ gilt:

$$\overline{AB_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{AC_n}.$$

Bestätigen Sie sodann durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke AB_nC_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n gilt:

$$A(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot (1,25x^2 + 6x + 36) \quad \text{FE}$$

Lösung zu Aufgabe A2.2**Seite eines Dreiecks bestimmen**

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$$\angle B_n A C_n = \angle A C_n B_n = 30^\circ$$

$$C_n \left(x \mid \frac{1}{2}x + 6 \right)$$

Maß des Winkels $\angle C_n B_n A$ bestimmen:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

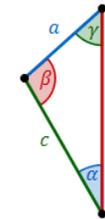
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Im Dreieck $A B_n C_n$ gilt also: $\angle C_n B_n A + \angle B_n A C_n + \angle A C_n B_n = 180^\circ$

$$\angle C_n B_n A = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$

Länge der Seite $[A B_n]$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck $A B_n C_n$ gilt somit: $\frac{\overline{A B_n}}{\sin \angle A C_n B_n} = \frac{\overline{A C_n}}{\sin \angle C_n B_n A}$

$$\frac{\overline{A B_n}}{\sin \angle A C_n B_n} = \frac{\overline{A C_n}}{\sin \angle C_n B_n A}$$

$$\frac{\overline{A B_n}}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{A C_n}}{\sin 120^\circ} \mid \cdot \sin 30^\circ$$

$$\overline{A B_n} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} \cdot \overline{A C_n}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

Die Sinuswerte können in der Formelsammlung nachgeschlagen werden. Für den Winkel 120° muss der Wert bei 60° abgelesen werden, da die zwei Winkel, die im ersten Quadranten liegen, denselben Sinuswert haben.

$$\overline{A B_n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \overline{A C_n}$$

$$\Rightarrow \overline{A B_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{A C_n}$$

Länge eines Vektors

Um den Flächeninhalt des Dreiecks berechnen zu können, benötigt man die Länge der Seite

$[AC_n]$. Sie entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{AC_n}$.

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Vektor $\overrightarrow{AC_n}$, der die Punkte A und C_n verbindet, hat die Koordinaten:

$$\overrightarrow{AC_n} = \underbrace{\vec{C_n} - \vec{A}}_{\text{„Spitze minus Fuss“}} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge \bar{a} eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\bar{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{AC_n} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2}$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

Erste binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Die erste binomische Formel wird auf $\left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2$ angewendet:

$$\left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot 6 + 6^2 = \frac{1}{4}x^2 + 6x + 36$$

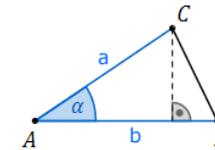
$$\overline{AC_n} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 6x + 36}$$

$$\Rightarrow \overline{AC_n} = \sqrt{1,25x^2 + 6x + 36}$$

Flächeninhalt eines Dreiecks

Flächeninhalt A des Dreiecks AB_nC_n bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB_n} \cdot \overline{AC_n} \cdot \sin \angle B_n A C_n$$

Erläuterung: *Erläuterung*

$\overline{AB_n}$ wird durch $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{AC_n}$ ersetzt (siehe Zwischenergebnis dieser Aufgabe).

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \overline{AC_n} \cdot \overline{AC_n} \cdot \sin 30^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \overline{AC_n} \cdot \overline{AC_n} \cdot \frac{1}{2}$$

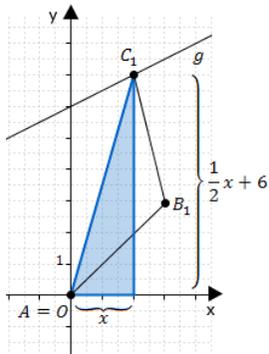
$$A = \frac{1}{4\sqrt{3}} \overline{AC_n}^2$$

$$A = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \left(\sqrt{1,25x^2 + 6x + 36}\right)^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot (1,25x^2 + 6x + 36)$$

Alternative Lösung

Die Länge der Seite $[AC]$ kann auch mit dem Satz des Pythagoras bestimmen werden:

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Abszisse x und die Ordinate $\frac{1}{2}x + 6$ des Punktes C_n bilden zusammen mit dem Punkt A ein rechtwinkliges Dreieck.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt somit:

$$\overline{AC_n}^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2$$

$$\overline{AC_n}^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2$$

$$\overline{AC_n}^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 6x + 36$$

$$\overline{AC_n}^2 = 1,25x^2 + 6x + 36$$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken AB_nC_n hat das Dreieck AB_0C_0 den minimalen Flächeninhalt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_0 .

Lösung zu Aufgabe A2.3**Extremwertaufgabe**

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

Dreiecke AB_nC_n haben einen, von der Abszisse x des Punktes C_n abhängigen, Flächeninhalt $A(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot (1,25x^2 + 6x + 36) = \left(\frac{1,25}{4\sqrt{3}}x^2 + \frac{6}{4\sqrt{3}}x + \frac{36}{4\sqrt{3}}\right)$ FE.

Punkte C_n haben die Koordinaten $\left(x \mid \frac{1}{2}x + 6\right)$.

x_S -Koordinate des Scheitelpunktes der Funktion $y = \frac{1,25}{4\sqrt{3}}x^2 + \frac{6}{4\sqrt{3}}x + \frac{36}{4\sqrt{3}}$ bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_nB_nC_n$ ist für verschiedene x unterschiedlich groß.

Für einen bestimmten x -Wert ist der Flächeninhalt $A(x) = \left(\frac{1,25}{4\sqrt{3}}x^2 + \frac{6}{4\sqrt{3}}x + \frac{36}{4\sqrt{3}}\right)$ FE am kleinsten (minimal).

Die Funktion $y = \frac{1,25}{4\sqrt{3}}x^2 + \frac{6}{4\sqrt{3}}x + \frac{36}{4\sqrt{3}}$ ist eine quadratische Funktion. Ihr Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel. Den kleinsten Funktionswert hat sie in ihrem Scheitelpunkt.

Die Koordinaten des Scheitelpunktes $S(x_S|y_S)$ einer Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$ sind gegeben durch:

$$S\left(\frac{-b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{\frac{6}{4\sqrt{3}}}{2 \cdot \frac{1,25}{4\sqrt{3}}} = -2,4$$

\Rightarrow Für $x_S = -2,4$ ist $A(x)$ minimal.

$$\Rightarrow x_{C_0} = -2,4$$

$$\Rightarrow C_0\left(-2,4 \mid \frac{1}{2} \cdot (-2,4) + 6\right)$$

$$\Rightarrow C_0(-2,4 \mid 4,8)$$

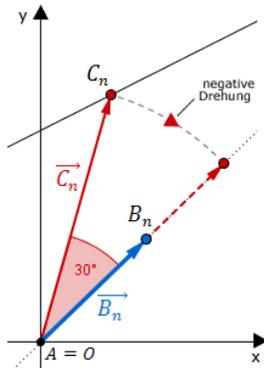
Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A2.4**2-dimensionale Geometrie**

$$C_n \left(x \mid \frac{1}{2}x + 6 \right) \Rightarrow \vec{C}_n = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Erläuterung*



Durch Drehung der Vektoren \vec{C}_n um den Winkel $\angle B_n A C_n = 30^\circ$, entstehen Vektoren die in die gleiche Richtung der Vektoren \vec{B}_n zeigen.

Eine Drehung im Uhrzeigersinn ist eine negative Drehung, deswegen ist hier der Drehwinkel gleich -30° .

Drehen der Vektoren \vec{C}_n um -30° :

Erläuterung: *Drehmatrix*

Ist α der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende

$$\text{Drehmatrix: } \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Sinus eines negativen Winkels, Kosinus eines negativen Winkels*

Für den Sinus und Kosinus eines negativen Winkels, gilt:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) & \sin(30^\circ) \\ -\sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor erfolgt über das Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot x + a_2 \cdot y \\ a_3 \cdot x + a_4 \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x + 6\right) \\ -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x + 6\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{4}x + 3 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}x + 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Strecken der Vektoren:

Erläuterung: *Erläuterung*

Um die gedrehten Vektoren \vec{C}_n auf \vec{B}_n zu strecken, werden die Vektoren \vec{C}_n mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{3}}$ multipliziert.

Grund hierfür: $\overline{AB}_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{AC}_n$ (siehe Aufgabe A2.2)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{4}x + 3 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}x + 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4\sqrt{3}}x + \frac{3}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{4}x - 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,64 \cdot x + 1,73 \\ -0,04 \cdot x + 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_n (0,64 \cdot x + 1,73 | -0,04 \cdot x + 3)$$