Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik I Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Gegeben sind Dreiecke $P\,Q_n\,R$ mit den Seitenlängen $\overline{P\,Q_n} = 3$ cm und $\overline{P\,R} = 8$ cm.
Die Winkel $Q_n\,P\,R$ haben das Maß φ mit $\varphi \in]0°; 90°[$.

Die nebenstehende Zeichnung zeigt das Dreieck $P\,Q_1\,R$ für $\varphi = 30°$.

Aufgabe A3.1 (1 Punkt)

Geben Sie die Länge der Strecken $[Q_n\,R]$ in Abhängigkeit von φ an.

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Die Dreiecke $P\,Q_n\,R$ rotieren um die Gerade $P\,R$.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Oberflächeninhalt O der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt:
$O(\varphi) = 3 \cdot \pi \cdot \sin\varphi \left(3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \cos\varphi}\right)$ cm^2.

Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

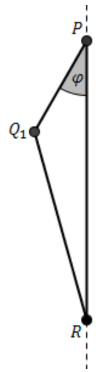
Die entstehenden Rotationskörper setzen sich jeweils aus zwei Kegeln zusammen.
Berechnen Sie, für welches Winkelmaß φ der Mantelflächeninhalt des Kegels mit der Spitze P einen Anteil von 30% am Oberflächeninhalt O des entstehenden Rotationskörpers hat.

Lösung

Aufgabe A3.

Gegeben sind Dreiecke $P\,Q_n\,R$ mit den Seitenlängen $\overline{P\,Q_n} = 3$ cm und $\overline{P\,R} = 8$ cm.
Die Winkel $Q_n\,P\,R$ haben das Maß φ mit $\varphi \in]0°; 90°[$.

Die nebenstehende Zeichnung zeigt das Dreieck $P\,Q_1\,R$ für $\varphi = 30°$.

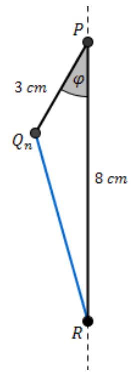


Aufgabe A3.1 (1 Punkte)

Geben Sie die Länge der Strecken $[Q_n\,R]$ in Abhängigkeit von φ an.

Lösung zu Aufgabe A3.1

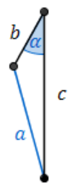
Seite eines Dreiecks bestimmen



Gegeben sind die Seiten $\overline{PQ_n} = 3$ cm und $\overline{RP} = 8$ cm und der eingeschlossene Winkel $\varphi = 30°$.

Gesucht ist die Länge des Seite $[Q_n R]$.
Länge des Seite $[Q_n R]$ bestimmen:

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$\overline{QR_n}^2 = \overline{PQ_n}^2 + \overline{RP}^2 - 2 \cdot \overline{PQ_n} \cdot \overline{RP} \cdot \cos\varphi$ | Wurzel ziehen

$\overline{QR_n} = \sqrt{\overline{PQ_n}^2 + \overline{RP}^2 - 2 \cdot \overline{PQ_n} \cdot \overline{RP} \cdot \cos\varphi}$

$\overline{QR_n} = \sqrt{3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos\varphi}$ cm

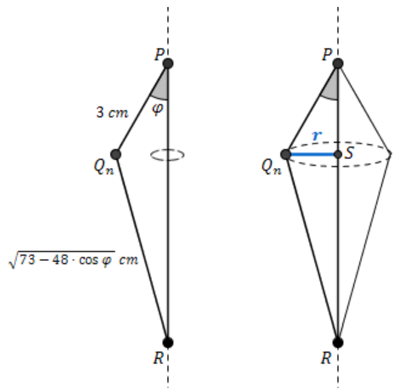
$\Rightarrow \overline{QR_n} = \sqrt{73 - 48 \cdot \cos\varphi}$ cm

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Die Dreiecke PQ_nR rotieren um die Gerade PR.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Oberflächeninhalt O der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt:
$O(\varphi) = 3 \cdot \pi \cdot \sin\varphi \left(3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \cos\varphi}\right)$ cm^2.

Lösung zu Aufgabe A3.2

Mantelfläche eines Kegels



Rotiert ein Dreieck PQ_nR um die Gerade PR, so entsteht ein Rotationskörper der aus zwei Kegeln besteht, einer mit Spitze P und der andere mit Spitze R. Beide haben den gleichen Radius r, der noch zu bestimmen ist.

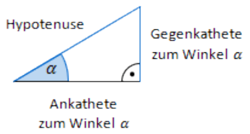
Der Oberflächeninhalt O des Rotationskörpers entspricht der Summe der Mantelflächen der beiden Kegeln.

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$\overline{PQ_n} = 3$ cm
$\overline{Q_nR} = \sqrt{73 - 48 \cdot \varphi}$ cm

Radius r der beiden Kegeln bestimmen:

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck PQ_nS, so gilt für den Sinus des Winkels φ:

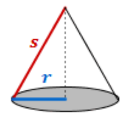
$$\sin\varphi = \frac{r}{\overline{PQ_n}} \Rightarrow r = \overline{PQ_n} \cdot \sin\varphi$$

$r = \overline{PQ_n} \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow r = 3 \cdot \sin\varphi$ cm

Mantelflächeninhalt M der beiden Kegeln bestimmen:

Erläuterung: *Mantelflächeninhalt eines geraden Kreiskegels*



Ein gerader Kreiskegel mit Radius r und Mantellinie der Länge s, hat einen Mantelflächeninhalt M von:

$M = s \cdot r \cdot \pi$

$M_{\text{Kegel mit Spitze } P} = \overline{PQ_n} \cdot r \cdot \pi$

$\Rightarrow M_{\text{Kegel mit Spitze } P} = (3 \cdot 3 \cdot \sin\varphi \cdot \pi)$ cm^2

$M_{\text{Kegel mit Spitze} R} = \overline{Q_nR} \cdot r \cdot \pi$

$\Rightarrow M_{\text{Kegel mit Spitze } R} = \left(\sqrt{73 - 48 \cdot \varphi} \cdot 3 \cdot \sin\varphi \cdot \pi\right)$ cm^2

Oberflächeninhalt O bestimmen:

$O(\varphi) = M_{\text{Kegel mit Spitze } P} + M_{\text{Kegel mit Spitze } R}$

$O(\varphi) = \left(3 \cdot 3 \cdot \sin\varphi \cdot \pi + \sqrt{73 - 48 \cdot \varphi} \cdot 3 \cdot \sin\varphi \cdot \pi\right)$ cm^2

$3 \cdot \pi \cdot \sin\varphi$ ausklammern:

$\Rightarrow O(\varphi) = 3 \cdot \pi \cdot \sin\varphi \cdot \left(3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \varphi}\right)$ cm^2

Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Die entstehenden Rotationskörper setzen sich jeweils aus zwei Kegeln zusammen.

Berechnen Sie, für welches Winkelmaß φ der Mantelflächeninhalt des Kegels mit der Spitze P einen Anteil von 30% am Oberflächeninhalt O des entstehenden Rotationskörpers hat.

Lösung zu Aufgabe A3.3

Verhältnis von Teilflächen

Wenn der Mantelflächeninhalt $M_{\text{Kegel mit Spitze }P}$ einen Anteil von 30% am Oberflächeninhalt $O(\varphi)$ haben soll, dann muss gelten:

$$M_{\text{Kegel mit Spitze }P} = 30\% \cdot O(\varphi)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$M_{\text{Kegel mit Spitze }P} = 0,3 \cdot O(\varphi)$$

Aus obiger Beziehung muss das Winkelmaß φ bestimmt werden.

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$$M_{\text{Kegel mit Spitze }P} = (3 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \sin\varphi)\ \text{cm}^2$$

$$O(\varphi) = 3 \cdot \pi \cdot \sin\varphi \cdot \left(3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \cos\varphi}\right)\ \ \text{cm}^2$$

Winkelmaß φ bestimmen:

$$M_{\text{Kegel mit Spitze }P} = 0,3 \cdot O(\varphi)$$

$$3 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \sin\varphi = 0,3 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \sin\varphi \cdot \left(3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \cos\varphi}\right)\ |: 0,3 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \sin\varphi$$

$$\frac{3}{0,3} = 3 + \sqrt{73 - 48 \cdot \cos\varphi}\ | - 3$$

$$\frac{3}{0,3} - 3 = +\sqrt{73 - 48 \cdot \cos\varphi}\ |\ \text{Quadrieren}$$

$$\left(\frac{3}{0,3} - 3\right)^2 = 73 - 48 \cdot \cos\varphi\ | - 73$$

$$\left(\frac{3}{0,3} - 3\right)^2 - 73 = -48 \cdot \cos\varphi\ |: (-48)$$

$$\frac{\left(\frac{3}{0,3} - 3\right)^2 - 73}{-48} = \cos\varphi$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\cos\varphi = \frac{\left(\frac{3}{0,3} - 3\right)^2 - 73}{-48}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{\left(\frac{3}{0,3} - 3\right)^2 - 73}{-48}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ cos

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left[\frac{\left(\frac{3}{0,3} - 3\right)^2 - 73}{-48}\right] = 60^\circ$$