

Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik II Aufgabe A2

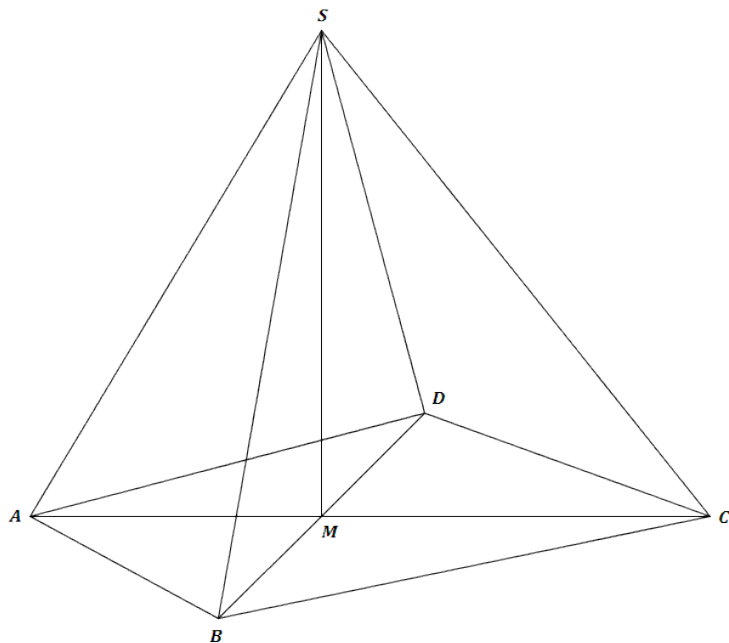
Aufgabe A2.

Das Drachenviereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse AC ist die Grundfläche der Pyramide $ABCD S$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt M des Drachenvierecks.

Es gilt: $\overline{AC} = 14$ cm; $\overline{AM} = 6$ cm; $\overline{BD} = 12$ cm; $\overline{MS} = 10$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$; $[AC]$ liegt auf der Schrägbildachse.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß α des Winkels CAS und die Länge der Strecke $[AS]$.
[Ergebnisse: $\alpha = 59,04^\circ$; $\overline{AS} = 11,66$ cm]

Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[AS]$ mit $\overline{AP_n} = x$ cm, $0 \leq x \leq 11,66$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeichnen Sie den Punkt P_1 für $x = 2,5$ und die Strecke $[P_1C]$ in die Zeichnung zu 2.0 ein. Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[P_1C]$ und das Maß des Winkels P_1CA .

Aufgabe A2.3 (1 Punkt)

Unter den Strecken $[P_nC]$ hat die Strecke $[P_2C]$ die minimale Länge.
Berechnen Sie die Länge der Strecke $[AP_2]$.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt $A_{\triangle ABS}$ des Dreiecks ABS .

Lösung

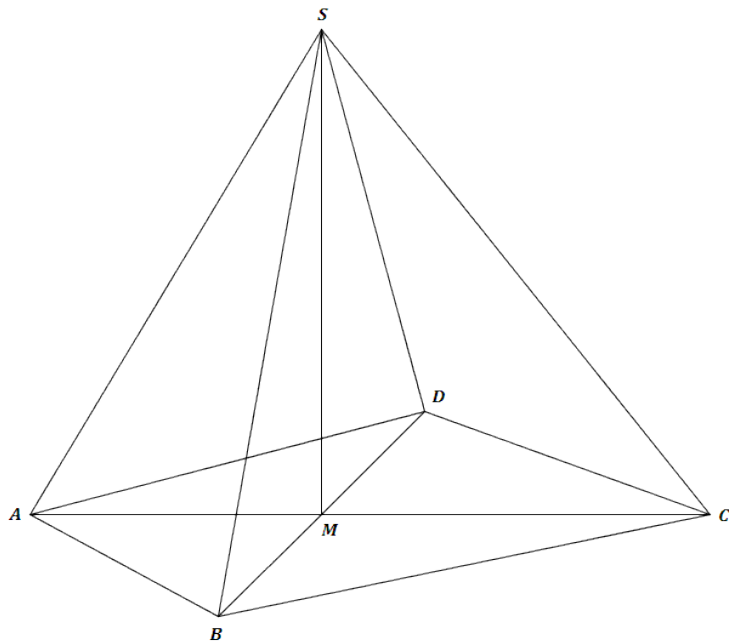
Aufgabe A2.

Das Drachenviereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse AC ist die Grundfläche der Pyramide $ABCD S$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt M des Drachenvierecks.

Es gilt: $\overline{AC} = 14 \text{ cm}$; $\overline{AM} = 6 \text{ cm}$; $\overline{BD} = 12 \text{ cm}$; $\overline{MS} = 10 \text{ cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$; $[AC]$ liegt auf der Schrägbildachse.



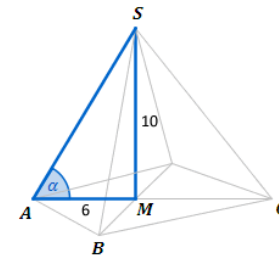
Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß α des Winkels $CA S$ und die Länge der Strecke $[AS]$.

[Ergebnisse: $\alpha = 59,04^\circ$; $\overline{AS} = 11,66 \text{ cm}$]

Lösung zu Aufgabe A2.1**Winkel bestimmen**

Man betrachtet das Dreieck AMS .



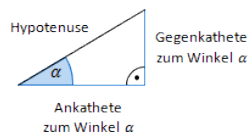
Gegeben:

$$\overline{AM} = 6 \text{ cm}$$

$$\overline{MS} = 10 \text{ cm}$$

Gesucht: $\angle CAS = \alpha$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \alpha = \frac{\overline{MS}}{\overline{AM}} = \frac{10}{6}$$

$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{10}{6} \approx 59,04^\circ$$

Länge einer Strecke

Gesucht: $\overline{AS}$

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{AS}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MS}^2$$

$$\overline{AS}^2 = 6^2 + 10^2 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$\overline{AS} = \sqrt{6^2 + 10^2} \approx 11,66 \text{ cm}$$

Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[AS]$ mit $\overline{AP_n} = x \text{ cm}$, $0 \leq x \leq 11,66$; $x \in \mathbb{R}$.

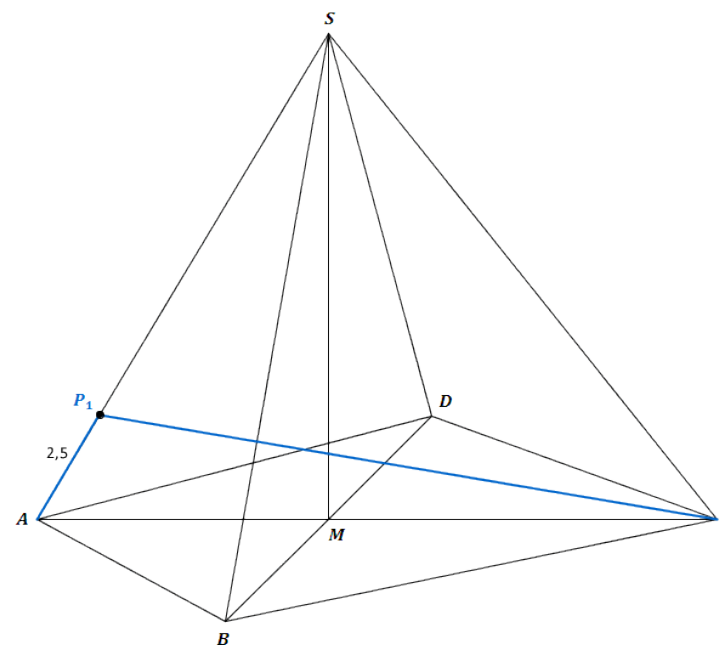
Zeichnen Sie den Punkt P_1 für $x = 2,5$ und die Strecke $[P_1C]$ in die Zeichnung zu 2.0

ein. Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[P_1C]$ und das Maß des Winkels P_1CA .

Lösung zu Aufgabe A2.2

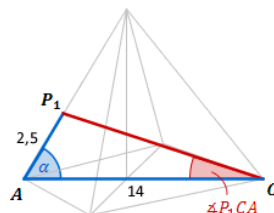
Skizze

Punkt P_1 für $x = 2,5$ und Strecke $[P_1C]$ einzeichnen:



Länge einer Strecke

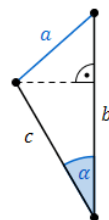
Man betrachtet das Dreieck ACP_1 .



Gegeben: $\overline{AP_1} = 2,5 \text{ cm}$; $\overline{AC} = 14 \text{ cm}$; $\alpha = 59,04^\circ$

Gesucht: $\overline{P_1C}$

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{P_1C}^2 = \overline{AP_1}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AP_1} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{P_1C}^2 = 2,5^2 + 14^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 14 \cdot \cos 59,04^\circ \quad | \sqrt{}$$

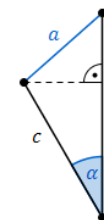
$$\overline{P_1C}^2 = \sqrt{2,5^2 + 14^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 14 \cdot \cos 59,04^\circ}$$

$$\overline{P_1C} \approx 12,89 \text{ cm}$$

Winkel bestimmen

Gesucht: $\angle P_1CA$

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{AP_1}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{P_1C}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{P_1C} \cdot \cos \angle P_1CA \quad | \quad + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{P_1C} \cdot \cos \angle P_1CA - \overline{AP_1}^2$$

$$2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{P_1C} \cdot \cos \angle P_1CA = \overline{AC}^2 + \overline{P_1C}^2 - \overline{AP_1}^2 \quad | \quad : (2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{P_1C})$$

$$\Rightarrow \cos \angle P_1CA = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{P_1C}^2 - \overline{AP_1}^2}{2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{P_1C}}$$

$$\cos \angle P_1CA = \frac{14^2 + 12,89^2 - 2,5^2}{2 \cdot 14 \cdot 12,89}$$

$$\angle P_1CA = \cos^{-1} \left(\frac{14^2 + 12,89^2 - 2,5^2}{2 \cdot 14 \cdot 12,89} \right)$$

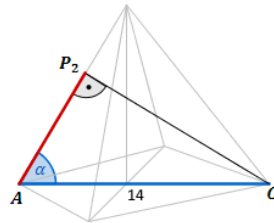
$$\angle P_1CA \approx 9,57^\circ$$

Aufgabe A2.3 (1 Punkte)

Unter den Strecken $[P_nC]$ hat die Strecke $[P_2C]$ die minimale Länge. Berechnen Sie die Länge der Strecke $[AP_2]$.

Lösung zu Aufgabe A2.3**Länge einer Strecke**

Man betrachtet das Dreieck $AC P_2$.



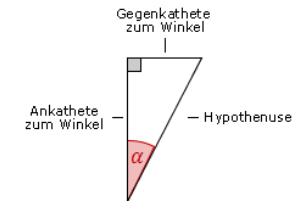
Gegeben: $\overline{AC} = 14 \text{ cm}$; $\alpha = 59,04^\circ$

Gesucht: $\overline{AP_2}$

Die Strecke $[P_2 C]$ ist genau dann von minimaler Länge, wenn sie senkrecht auf $[AP_2]$ steht.

$$\Rightarrow \angle A P_2 C = 90^\circ$$

Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AP_2}}{\overline{AC}}$$

$$\cos 59,04^\circ = \frac{\overline{AP_2}}{14} \quad | \quad \cdot 14$$

$$\overline{AP_2} = 14 \cdot \cos 59,04^\circ$$

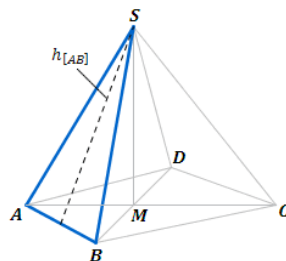
$$\overline{AP_2} \approx 7,20 \text{ cm}$$

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt $A_{\Delta ABS}$ des Dreiecks ABS .

Lösung zu Aufgabe A2.4**Flächeninhalt eines Dreiecks**

Gegeben: $\overline{AM} = 6 \text{ cm}$; $\overline{BM} = 6 \text{ cm}$; $\overline{AS} = 11,66 \text{ cm}$; $\overline{MS} = 10 \text{ cm}$



Erläuterung: *Gleichschenkliges Dreieck*

$$\overline{AS} = \sqrt{6^2 + 10^2} \approx 11,66 \text{ cm} \quad (\text{siehe Teilaufgabe A2.1})$$

Im rechtwinkligen Dreieck BSM gilt nach Pythagoras:

$$\overline{BS}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MS}^2$$

$$\overline{BS} = \sqrt{6^2 + 10^2} \approx 11,66 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \overline{AS} = \overline{BS} \quad (\text{„Schenkel“})$$

Man betrachtet das *gleichschenklige* Dreieck ABS mit Basis $[AB]$.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

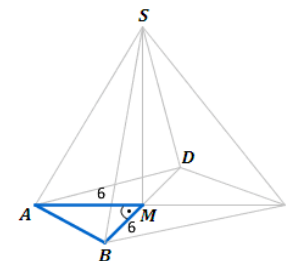
Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

$$A_{\Delta ABS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{[AB]}$$

Zur Berechnung von $\overline{AB}$ betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ABM .



Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

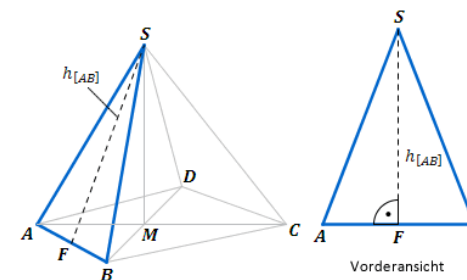
In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$$

$$\overline{AB}^2 = 6^2 + 6^2 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{72} \approx 8,49 \text{ cm}$$

Zur Berechnung von $h_{[AB]}$ betrachtet man das Dreieck AFS .



Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{AS}^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}\right)^2 + h_{[AB]}^2$$

$$11,66^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 8,49\right)^2 + h_{[AB]}^2$$

$$h_{[AB]}^2 = 11,66^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 8,49\right)^2 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$h_{[AB]} = \sqrt{11,66^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 8,49\right)^2}$$

$$h_{[AB]} \approx 10,86 \text{ cm}$$

Für den Flächeninhalt gilt dann:

$$A_{\Delta ABS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{[AB]}$$

$$A_{\Delta ABS} = \frac{1}{2} \cdot 8,49 \cdot 10,86$$

$$A_{\Delta ABS} \approx 46,10 \text{ cm}^2$$