Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik II Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-5|-19)$ und $Q(7|5)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = -0,25x^2 + b\,x + c$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die Gerade g ist festgelegt durch die Punkte $R(0|2,5)$ und $S(5|0)$.

Aufgabe B1.1 (5 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c, dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + 2,5x - 0,25$ hat und bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g. Zeichnen Sie sodann die Parabel p für $x \in [0;12]$ und die Gerade g in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leqq x \leqq 14$; $-7 \leqq y \leqq 7$

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x|-0,5x+2,5)$ auf der Geraden g und Punkte $D_n(x|-0,25x^2+2,5x-0,25)$ auf der Parabel p haben dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten B_n und C_n die Eckpunkte von Trapezen $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$.
Es gilt: $[A_n\,B_n] \parallel [C_n\,D_n]$; $\measuredangle B_n\,A_n\,D_n = 90°$; $x_{A_n} < x_{B_n}$; $\overline{A_n\,B_n} = 4$ LE und $\overline{C_n\,D_n} = 2$ LE.
Zeichnen Sie die Trapeze $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x = 2$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x = 9$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Trapeze $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$A(x) = (-0,75x^2 + 9x - 8,25)$ FE

Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Werte von x es Trapeze $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt.

Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Unter den Trapezen $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ besitzt das Trapez $A_0\,B_0\,C_0\,D_0$ den maximalen Flächeninhalt.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $A_0\,B_0\,C_0\,D_0$ und den zugehörigen Wert für x.

Aufgabe B1.6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie im Trapez $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ aus Aufgabe 1.2 rechnerisch das Maß des Winkels $\measuredangle C_2\,B_2\,A_2$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.
Begründen Sie sodann, dass es kein Trapez $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt, für das gilt: $\measuredangle C_n\,B_n\,A_n = 75°$.

Lösung

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-5|-19)$ und $Q(7|5)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = -0,25x^2 + b\,x + c$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die Gerade g ist festgelegt durch die Punkte $R(0|2,5)$ und $S(5|0)$.

Aufgabe B1.1 (5 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c, dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + 2,5x - 0,25$ hat und bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g. Zeichnen Sie sodann die Parabel p für $x \in [0;12]$ und die Gerade g in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leqq x \leqq 14$; $-7 \leqq y \leqq 7$

Lösung zu Aufgabe B1.1

Funktionsgleichung ermitteln

Gegeben:

$p: y = -0,25x^2 + b\,x + c$

$P(-5|-19)$ und $Q(7|5)$ liegen auf p.

Gesucht sind die Parameter b und c.

Erläuterung: *Gleichungssystem aufstellen*

Die Punkte P und Q werden in die Parabelgleichung p eingesetzt.
Man erhält ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten b und c.

$$\begin{array}{lrcl} P: & -19 & = & -0,25 \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + c \\ Q: & 5 & = & -0,25 \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c \end{array}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Gleichungen werden ab hier mit I. und II. gekennzeichnet.

$$\begin{array}{lrcl} \text{I.} & -19 & = & -6,25 - 5b + c \\ \text{II.} & 5 & = & -12,25 + 7b + c \quad | \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I.} & -19 & = & -6,25 - 5b + c \\ \text{II.} & -5 & = & 12,25 - 7b - c \end{array}$$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Additionsverfahren*

Die zweite Gleichung wird mit -1 multipliziert. Somit kommt in der ersten Gleichung der Term c und in der zweiten Gleichung der Term $-c$ vor. Danach werden die beiden Gleichungen addiert, wodurch der Parameter c verschwindet.

$$\begin{array}{lrcll} \text{I+II.} & -24 & = & 6 - 12b & | \quad -6 \\ & -30 & = & -12b & | \ :(-12) \\ & b & = & 2,5 & \end{array}$$

$b = 2,5$ in I. einsetzen:

$$\begin{array}{rcl} -19 & = & -6,25 - 5 \cdot 2,5 + c \\ -19 & = & -6,25 - 12,5 + c \\ c & = & -0,25 \end{array}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$b = 2,5$ und $c = -0,25$ werden in die Parabelgleichung eingesetzt.

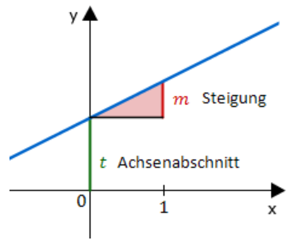
$\Rightarrow \quad p: y = -0,25x^2 + 2,5x - 0,25$

Geradengleichung aufstellen

Gegeben: $R(0|2,5)$, $S(5|0)$, $\quad R, S \in g$

Gesucht: g

Erläuterung: *Geradengleichung*



Die Funktionsgleichung einer Geraden lautet:

$y = m \cdot x + t$

Dabei ist:

m die Steigung der Geraden
t der y-Achsenabschnitt

$g: y = mx + t$

Erläuterung: *Zwei-Punkte-Form*

Steigung einer Geraden mit der Zwei-Punkte-Form:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Hier: $\quad m = \dfrac{y_R - y_S}{x_R - x_s} = \dfrac{2,5 - 0}{0 - 5}$

Steigung m bestimmen:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2,5 - 0}{0 - 5} = \frac{2,5}{-5} = -0,5$$

$y = -0,5x + t$

Erläuterung: *Einsetzen*

Der Punkt R wird in $y = -0,5x + t$ eingesetzt um den y-Achsenabschnitt t zu bestimmen.

y-Achsenabschnitt t bestimmen:

$R: 2,5 = -0,5 \cdot 0 + t$

$t = 2,5$

$\Rightarrow \quad g: y = -0,5x + 2,5$

Skizze

Scheitelpunkt $S(x_S|y_S)$ der Parabel bestimmen:

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Eine quadratische Funktion der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ besitzt folgenden Scheitelpunkt S:

$S\left(-\dfrac{b}{2a} | c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$ (siehe Formelsammlung)

Der Scheitelpunkt wird hier berechnet um die Parabel leichter einzeichnen zu können.

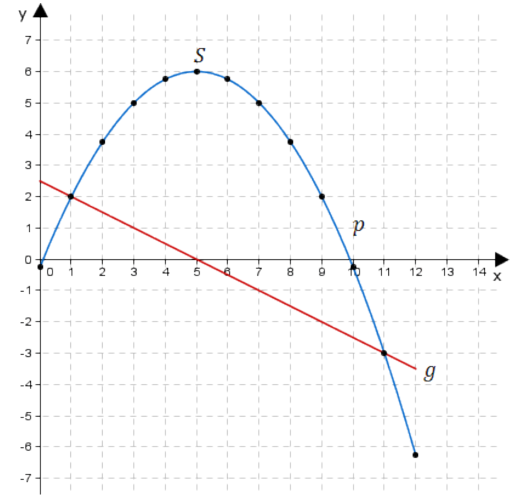
$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2,5}{-2 \cdot 0,25} = 5$$

$y_S = 6$

$\Rightarrow \quad S(5|6)$

Wertetabelle für die Parabel erstellen:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	-0,25	2	3,75	5	5,75	6	5,75	5	3,75	2	-0,25	-3	-6,25



Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x|-0,5x+2,5)$ auf der Geraden g und Punkte $D_n(x|-0,25x^2+2,5x-0,25)$ auf der Parabel p haben dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten B_n und C_n die Eckpunkte von Trapezen $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$.
Es gilt: $[A_n\,B_n] \parallel [C_n\,D_n]$; $\measuredangle B_n\,A_n\,D_n = 90°$; $x_{A_n} < x_{B_n}$; $\overline{A_n\,B_n} = 4$ LE und $\overline{C_n\,D_n} = 2$ LE.
Zeichnen Sie die Trapeze $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x = 2$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x = 9$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein

Lösung zu Aufgabe B1.2

Skizze

Trapeze $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ eintragen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

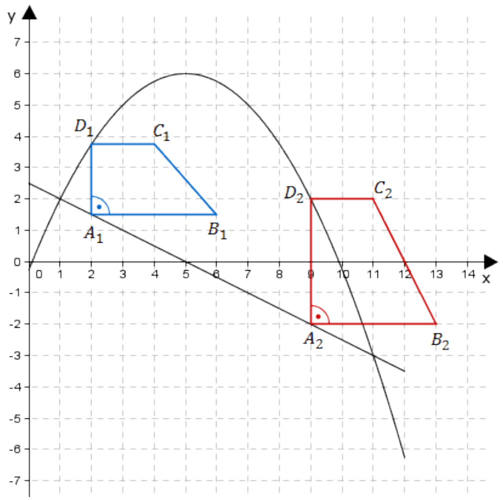
Vorgehensweise für das Einzeichnen:

1. Punkte A_1 und D_1 auf der Geraden bzw. Parabel bei $x = 2$ einzeichnen und zur Strecke $[A_1 D_1]$ verbinden.

2. Der Punkt B_1 ist 4 LE von A_1 entfernt. Wegen dem rechten Winkel bei A_1, ist $[A_1 B_1]$ parallel zur x-Achse.

3. Der Punkt C_1 ist 2 LE von D_1 entfernt. Die Strecke $[D_1 C_1]$ ist parallel zu $[A_1 B_1]$.

Analoges gilt für das Trapez $A_2 B_2 C_2 D_2$.

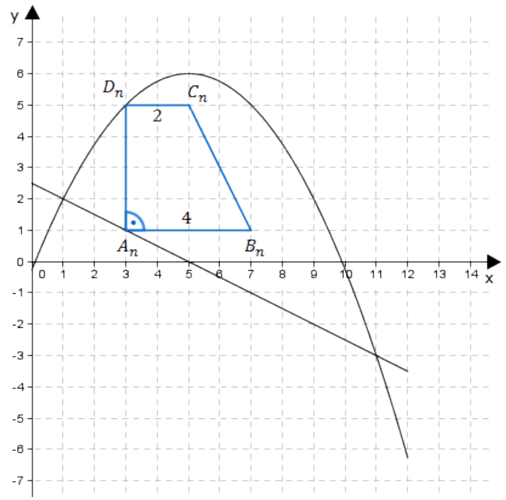


Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Bestätigen Sie durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Trapeze $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$A(x) = (-0,75x^2 + 9x - 8,25)$ FE

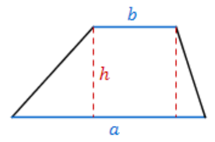
Lösung zu Aufgabe B1.3

Flächeninhalt eines Trapezes



Gegeben: $A_n(x|-0,5x+2,5)$, $D_n(x|-0,25x^2+2,5x-0,25)$, $\overline{A_n B_n} = 4$ LE und $\overline{D_n C_n} = 2$ LE

Erläuterung: *Fläche eines Trapezes*



Ein Trapez mit den Grundseiten a und b und der Höhe h hat einen Flächeninhalt von:

$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$ Hier gilt:

$a = \overline{A_n B_n}, \quad b = \overline{D_n C_n}, \quad h = \overline{A_n D_n}$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{A_n B_n} + \overline{D_n C_n}\right) \cdot \overline{A_n D_n}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (4 + 2) \cdot \overline{A_n D_n}$$

Erläuterung: *Abstand zweier Punkte*

Die Länge der Strecke $[A_n D_n]$ ist gleich dem Abstand der Punkte A_n und D_n.

Da die Punkte A_n und B_n die gleich Abszisse x haben, entspricht ihr Abstand der Differenz ihrer Ordinaten.

$$\overline{A_n D_n} = y_{D_n} - y_{A_n}$$
$$\overline{A_n D_n} = -0,25x^2 + 2,5x - 0,25 - (-0,5x + 2,5)$$
$$\overline{A_n D_n} = \left(-0,25x^2 + 3x - 2,75\right) \text{ LE}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(-0,25x^2 + 3x - 2,75\right)$$

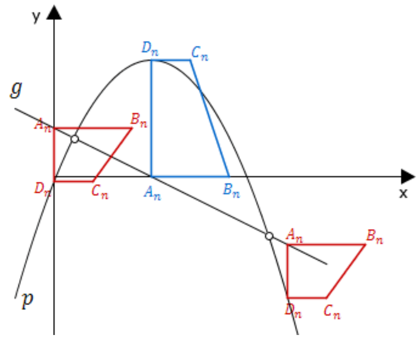
$$A(x) = \left(-0,75x^2 + 9x - 8,25\right) \text{ FE}$$

Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Werte von x es Trapeze $A_n B_n C_n D_n$ gibt.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Schnittpunkt zweier Funktionen



Erläuterung: *Erläuterung*

Wenn man über die Schnittpunkte hinaus geht, so entstehen zwar trotzdem Trapeze, aber diese haben nicht die gleiche Orientierung wie die Trapeze $A_n B_n C_n D_n$. Es entstehen, wie in Bild eingezeichnet, Trapeze $D_n C_n B_n A_n$.

Nur zwischen den Schnittpunkten gibt Trapeze $A_n B_n C_n D_n$.

Schnittstellen bestimmen:

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar (x, y), einen gemeinsamen Punkt, besitzen.

Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach x auf.

$$\begin{aligned} p \cap g: \quad -0,25x^2 + 2,5x - 0,25 &= -0,5x + 2,5 \\ -0,25x^2 + 3x - 2,75 &= 0 \end{aligned}$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-0,25) \cdot (-2,75)}}{2 \cdot (-0,25)}$$

$x_1 = 11 \ \vee \ x_2 = 1$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die x-Werte 1 und 11 werden ausgeschlossen, da an dieser Stelle die y-Koordinate von A_n und D_n gleich ist und kein Trapez entstehen kann.

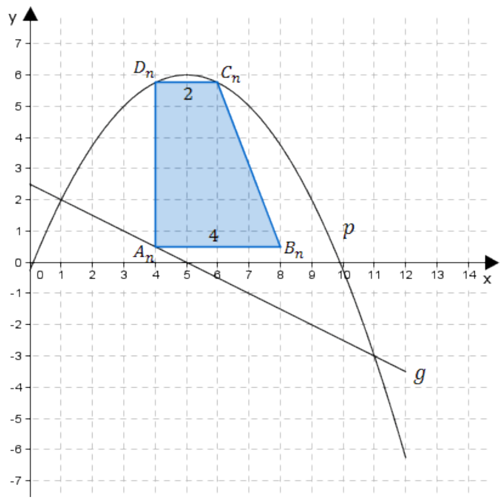
Es existieren Trapeze $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ für $x \in]1; 11[$.

Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Unter den Trapezen $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ besitzt das Trapez $A_0\,B_0\,C_0\,D_0$ den maximalen Flächeninhalt.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Trapezes $A_0\,B_0\,C_0\,D_0$ und den zugehörigen Wert für x.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Extremwertaufgabe



Flächeninhalt A der Trapeze $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$:

$A(x) = \left(-0,75x^2 + 9x - 8,25\right)$ FE (s. Teilaufgabe 1.3)

$x_{\max} = x_{A_0} = x_{D_0} = x_S$ von $A(x)$

$$x_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{2 \cdot (-0,75)} = 6$$

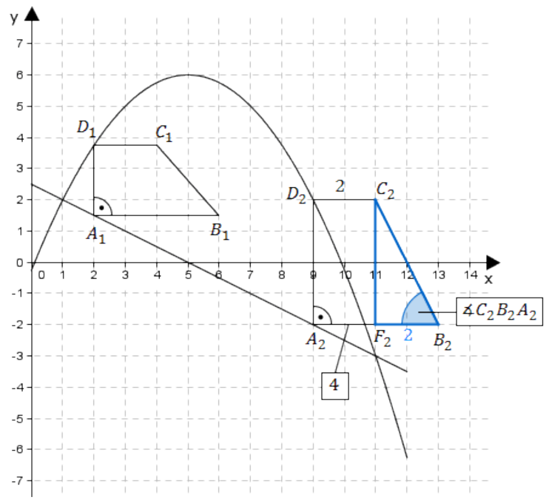
$\Rightarrow \quad A_{A_0\,B_0\,C_0\,D_0} = A(6) = 18,75$ FE

Aufgabe B1.6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie im Trapez $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ aus Aufgabe 1.2 rechnerisch das Maß des Winkels $\measuredangle C_2\,B_2\,A_2$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.
Begründen Sie sodann, dass es kein Trapez $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt, für das gilt: $\measuredangle C_n\,B_n\,A_n = 75°$.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Winkel bestimmen



Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $F_2\,B_2\,C_2$. Es gilt:

$\overline{F_2\,B_2} = 2$ LE

$$\begin{aligned}\overline{C_2\,F_2} &= \overline{A_2\,D_2}\\ &= p(9) - g(9)\\ &= -0,25 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 - 2,75\\ &= 4\,\text{LE}\end{aligned}$$

$$\tan\measuredangle C_2\,B_2\,A_2 = \frac{\overline{C_2\,F_2}}{\overline{F_2\,B_2}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\measuredangle C_2\,B_2\,A_2 = \tan^{-1}(2) \approx 63,43^\circ$$

Extremwertaufgabe

Überlegung:

Der größtmögliche Winkel befindet sich im Trapez $A_0\,B_0\,C_0\,D_0$, da die Höhe $\overline{C_0\,F_0}$ des Dreiecks $F_0\,B_0\,C_0$ die längste Höhe aller Dreiecke $F_n\,B_n\,C_n$ ist.

$$\begin{aligned}\overline{C_0\,F_0} &= \overline{A_0\,D_0}\\ &= p(6) - g(6)\\ &= -0,25 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 - 2,75\\ &= 6,25\,\text{LE}\end{aligned}$$

$$\tan\measuredangle C_0\,B_0\,A_0 = \frac{\overline{A_0\,D_0}}{\overline{F_0\,B_0}} = \frac{6,25}{2} = 2$$

$$\measuredangle C_0\,B_0\,A_0 = \tan^{-1}(2) \approx 72,26^\circ < 75^\circ$$

$\Rightarrow$ Es gibt kein Trapez dessen Winkel $C_n\,B_n\,A_n$ größer als 75° ist.