

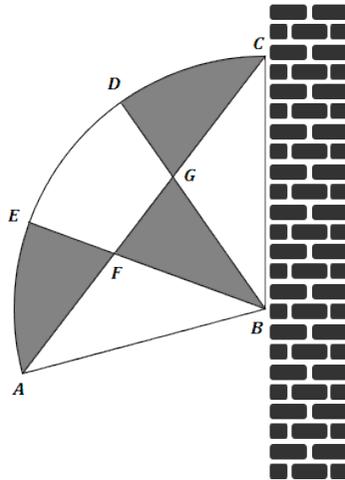
Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik II Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Nebenstehende Skizze zeigt einen kreissektorförmigen Sonnenfächer, der Balkone vor Sonne, Wind und neugierigen Blicken schützen soll. Zwei Stäbe zwischen den Punkten D und B sowie zwischen den Punkten E und B teilen den Sonnenfächer in drei kongruente Teilspektoren.

Es gilt: $\overline{BC} = 110,0$ cm; $b = 201,6$ cm ist die Länge des Bogens \widehat{CA} ; $D \in \widehat{CA}$; $E \in \widehat{CA}$.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.



Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß β des Winkels $\angle C B A$. Zeichnen Sie den Kreissektor $B C A$ mit dem Mittelpunkt B und dem Radius \overline{BC} sowie die Strecken $[DB]$, $[EB]$ und $[AC]$ im Maßstab 1 : 10.

[Ergebnis: $\beta = 105,0^\circ$]

Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Um die Stabilität des Sonnenfächers zu erhöhen, wird zwischen den Punkten A und C eine Stange eingezogen, die um 5% kürzer ist als die Strecke $[AC]$. Bestimmen Sie rechnerisch die Länge l dieser Stange.

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

An den Punkten B und C wird der Sonnenfächer an einer Mauer fest verankert. Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Abstand d des Punktes A zu dieser Mauer gilt: $d = 106,3$ cm.

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Die Strecke $[AC]$ schneidet die Strecke $[DB]$ im Punkt G und die Strecke $[EB]$ im Punkt F . Berechnen Sie die Länge der Strecke $[GB]$ sowie den Flächeninhalt $A_{\Delta BGF}$ des Dreiecks BGF .

[Ergebnisse: $\overline{GB} = 70,2$ cm; $A_{\Delta BGF} = 1413,3$ cm²]

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt A_{CDG} der Figur CDG , die durch den Kreisbogen \widehat{CA} sowie die Strecken $[DG]$ und $[GC]$ begrenzt wird.

[Ergebnis: $A_{CDG} = 1481,2$ cm²]

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Der Sonnenfächer soll zweifarbig gestaltet werden. Dazu werden die Flächen der Figur CDG , der Figur EAF und des Dreiecks BGF entsprechend der Skizze dunkel abgesetzt.

Zeigen Sie rechnerisch, dass der helle Teil um mehr als 40% größer ist als der dunkle Teil.

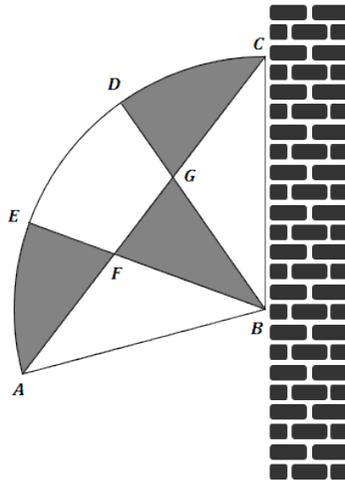
Lösung

Aufgabe B2.

Nebenstehende Skizze zeigt einen kreissektorförmigen Sonnenfächer, der Balkone vor Sonne, Wind und neugierigen Blicken schützen soll. Zwei Stäbe zwischen den Punkten D und B sowie zwischen den Punkten E und B teilen den Sonnenfächer in drei kongruente Teilspektoren.

Es gilt: $\overline{BC} = 110,0$ cm; $b = 201,6$ cm ist die Länge des Bogens \widehat{CA} ; $D \in \widehat{CA}$; $E \in \widehat{CA}$.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.



Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß β des Winkels $\angle CBA$. Zeichnen Sie den Kreissektor BCA mit dem Mittelpunkt B und dem Radius \overline{BC} sowie die Strecken $[DB]$, $[EB]$ und $[AC]$ im Maßstab 1 : 10.

[Ergebnis: $\beta = 105,0^\circ$]

Lösung zu Aufgabe B2.1

Winkel bestimmen

Gegeben: $\overline{BC} = 110,0$ cm; $b = 201,6$ cm (Länge des Bogens \widehat{CA})

Gesucht: $\beta = \angle CBA$

Erläuterung: *Bogenlänge*

Die Länge b eines Kreisbogens mit dem Mittelpunktswinkel α und dem Radius r lässt sich durch folgende Formel berechnen:

$$b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$

Es gilt:

$$b = \pi \cdot \overline{BC} \cdot \frac{\beta}{180^\circ}$$

$$201,6 = \pi \cdot 110,0 \cdot \frac{\beta}{180^\circ} \quad | \quad : 110\pi$$

$$\frac{201,6}{110\pi} = \frac{\beta}{180^\circ} \quad | \quad \cdot 180^\circ$$

$$\beta = \frac{201,6}{110\pi} \cdot 180^\circ$$

$$\beta \approx 105,0^\circ$$

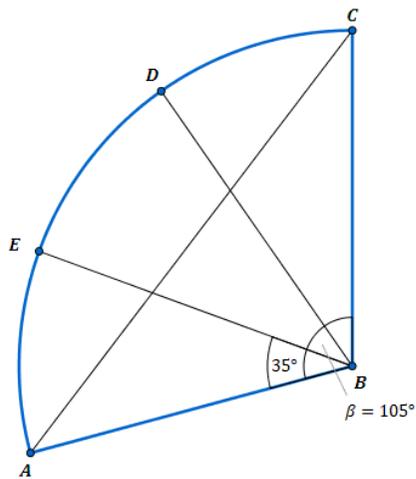
Skizze

Kreissektor BCA einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Beachte den Maßstab 1 : 10!

- 1) $\overline{BC} = 11$ cm einzeichnen
- 2) Winkel β beim Scheitelpunkt B antragen
- 3) Kreisbogen um B mit dem Radius 11 cm schneidet den Schenkel des Winkels β in A
- 4) 3 kongruente Teilsektoren bedeutet, dass jeder Teilsektor den Mittelpunktswinkel $\frac{105^\circ}{3} = 35^\circ$ besitzt
- 5) Strecken $[DB]$, $[EB]$ und $[AC]$ einzeichnen



Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Um die Stabilität des Sonnenfächers zu erhöhen, wird zwischen den Punkten A und C

eine Stange eingezogen, die um 5% kürzer ist als die Strecke $[AC]$.
Bestimmen Sie rechnerisch die Länge l dieser Stange.

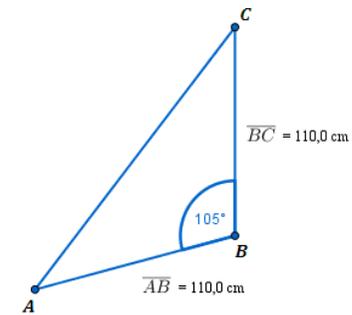
Lösung zu Aufgabe B2.2

Länge einer Strecke

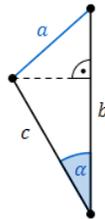
Gegeben: $\overline{BC} = \overline{AB} = 110,0$ cm, $\beta = 105,0^\circ$

Gesucht: \overline{AC}

Man betrachtet das Dreieck ABC .



Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und a und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Es gilt:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \beta$$

$$\overline{AC}^2 = 110^2 + 110^2 - 2 \cdot 110 \cdot 110 \cdot \cos 105^\circ$$

$$\overline{AC} = \sqrt{110^2 + 110^2 - 2 \cdot 110 \cdot 110 \cdot \cos 105^\circ}$$

$$\overline{AC} \approx 174,5 \text{ cm}$$

Der Länge l der Stange ist um 5% kürzer als \overline{AC} .

$$\Rightarrow l \text{ entspricht } 95\% \text{ von } \overline{AC}.$$

$$\Rightarrow l = 0,95 \cdot \overline{AC} = 0,95 \cdot 174,5 \approx 165,8 \text{ cm}$$

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

An den Punkten B und C wird der Sonnenfächer an einer Mauer fest verankert.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Abstand d des Punktes A zu dieser Mauer gilt:
 $d = 106,3 \text{ cm}$.

Lösung zu Aufgabe B2.3

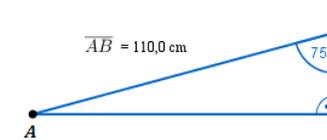
Abstand Punkt - Gerade

Gegeben: $\overline{AB} = 110,0 \text{ cm}$, $\beta = 105,0^\circ$

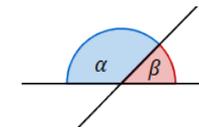
Der Abstand d des Punktes A von der Mauer ist gleich dem Abstand von A zur Geraden BC .

Ein Abstand ist immer die Länge der Lotstrecke von diesem Punkt auf die Gerade.

Man betrachtet das Dreieck AHB . Hier kann noch ein Winkel bestimmt werden.



Erläuterung: *Nebenwinkel*



Sind α und β Nebenwinkel, so gilt folgende Beziehung:

$$\alpha = 180^\circ - \beta$$

$$\angle ABH = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

Im rechtwinkligen Dreieck AHB gilt nun:

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin \angle A B H = \frac{\overline{A H}}{\overline{A B}}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{d}{110}$$

$$d = 110 \cdot \sin 75^\circ \approx 106,3 \text{ cm}$$

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Die Strecke $[AC]$ schneidet die Strecke $[DB]$ im Punkt G und die Strecke $[EB]$ im Punkt F . Berechnen Sie die Länge der Strecke $[GB]$ sowie den Flächeninhalt $A_{\Delta BGF}$ des Dreiecks BGF .

[Ergebnisse: $\overline{GB} = 70,2 \text{ cm}$; $A_{\Delta BGF} = 1413,3 \text{ cm}^2$]

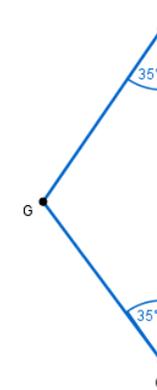
Lösung zu Aufgabe B2.4

Länge einer Strecke

Gegeben: $\beta = 105,0^\circ$

Gesucht: \overline{GB}

Man betrachtet das Dreieck GCB .



Neben dem gegebenen Winkel $\angle C B G = \frac{\beta}{3} = 35^\circ$ kann auch der Winkel $\angle G C B$ bestimmt werden.

Erläuterung: *Winkel berechnen*

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sind die beiden Basiswinkel gleich groß ($\alpha = \beta$).

Von der Winkelsumme 180° wird zunächst der Scheitelwinkel γ abgezogen, wobei das doppelte Maß eines Basiswinkels (2α) übrig bleibt.

$$2\alpha = 180^\circ - \gamma \quad | \quad : 2$$

Somit erhält man die Formel für den Basiswinkel:

$$\alpha = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$$

$$\angle G C B = \frac{180^\circ - \beta}{2} \quad (\text{Basiswinkel des Dreiecks } ABC)$$

$$\angle G C B = \frac{180^\circ - 105^\circ}{2} = 37,5^\circ$$

Zuletzt ist auch der Winkel $\angle B G C$ berechenbar.

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

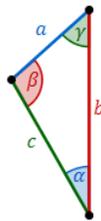
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

$$\angle BGC = 180^\circ - \angle CBG - \angle GCB$$

$$\angle BGC = 180^\circ - 35^\circ - 37,5^\circ = 107,5^\circ$$

Nun sind im Dreieck GCB alle Innenwinkel und die Länge der Strecke $[BC]$ gegeben.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Es gilt:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \angle BGC} = \frac{\overline{GB}}{\sin \angle GCB}$$

$$\frac{110}{\sin 107,5^\circ} = \frac{\overline{GB}}{\sin 37,5^\circ} \quad | \cdot \sin 37,5^\circ$$

$$\overline{GB} = \frac{110}{\sin 107,5^\circ} \cdot \sin 37,5^\circ \approx 70,2 \text{ cm}$$

Flächeninhalt eines Dreiecks

Gesucht: $A_{\triangle BGF}$

Da die gesamte Figur aus kongruenten Teilspektoren besteht und symmetrisch ist, ist das Dreieck BGF gleichschenkelig mit den Maßen:

$$\angle GBF = \frac{\beta}{3} = 35^\circ, \quad \overline{GB} = \overline{FB} = 70,2 \text{ cm}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{\triangle BGF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GB} \cdot \overline{FB} \cdot \sin \angle GBF$$

$$A_{\triangle BGF} = \frac{1}{2} \cdot 70,2 \cdot 70,2 \cdot \sin 35^\circ \approx 1413,3 \text{ cm}^2$$

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt A_{CDG} der Figur CDG , die durch den Kreisbogen \widehat{CA} sowie die Strecken $[DG]$ und $[GC]$ begrenzt wird.
[Ergebnis: $A_{CDG} = 1481,2 \text{ cm}^2$]

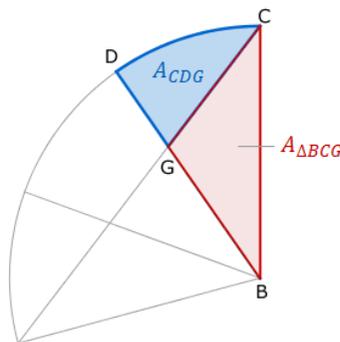
Lösung zu Aufgabe B2.5

Flächeninhalt einer geometrischen Figur

Gegeben: $\overline{BC} = 110,0 \text{ cm}$, $\angle CBD = 35^\circ$, $\overline{GB} = 70,2 \text{ cm}$

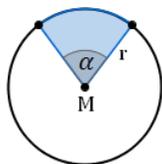
Ansatz:

$$A_{CDG} = A_{\text{Sektor } BCD} - A_{\triangle BCG}$$



Berechnung $A_{\text{Sektor } BCD}$:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an.

$$A_{\text{Sektor } BCD} = \overline{BC}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\angle CBD}{360^\circ} = 110^2 \cdot \pi \cdot \frac{35^\circ}{360^\circ}$$

Berechnung $A_{\Delta BCG}$:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{\Delta BCG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{GB} \cdot \sin \angle CBD = \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 70,2 \cdot \sin 35^\circ$$

$$A_{CDG} = A_{\text{Sektor } BCD} - A_{\Delta BCG}$$

$$A_{CDG} = 110^2 \cdot \pi \cdot \frac{35^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 70,2 \cdot \sin 35^\circ$$

$$A_{CDG} \approx 1481,2 \text{ cm}^2$$

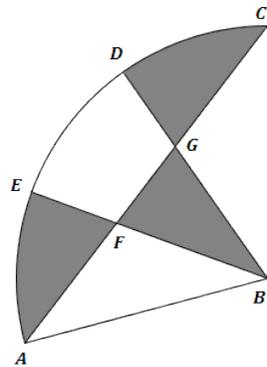
Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Der Sonnenfächer soll zweifarbig gestaltet werden. Dazu werden die Flächen der Figur CDG , der Figur EAF und des Dreiecks BGF entsprechend der Skizze dunkel abgesetzt.

Zeigen Sie rechnerisch, dass der helle Teil um mehr als 40% größer ist als der dunkle Teil.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Flächeninhalt einer geometrischen Figur



Gegeben: $A_{CDG} = 1481,2 \text{ cm}^2$, $A_{\Delta BGF} = 1413,3 \text{ cm}^2$, $\overline{BC} = 110,0 \text{ cm}$, $\beta = 105^\circ$

Zuerst wird die Summe der dunklen Flächen berechnet:

$$A_{\text{dunkel}} = A_{CDG} + A_{EAF} + A_{\Delta BGF}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt*

Wegen den kongruenten Teilsektoren und der Symmetrie gilt außerdem:

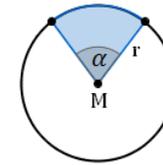
$$A_{CDG} = A_{EAF}$$

$$A_{\text{dunkel}} = 1481,2 + 1481,2 + 1413,3 = 4375,7 \text{ cm}^2$$

Berechnung der hellen Gesamtfläche:

$$A_{\text{hell}} = A_{\text{Sektor } BCA} - A_{\text{dunkel}}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an.

$$A_{\text{hell}} = \overline{BC}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\beta}{360^\circ} - A_{\text{dunkel}}$$

$$A_{\text{hell}} = 110^2 \cdot \pi \cdot \frac{105^\circ}{360^\circ} - 4375,7 \approx 6911,5 \text{ cm}^2$$

Größenvergleich:

40% des dunklen Teils:

$$0,4 \cdot A_{\text{dunkel}} = 0,4 \cdot 4375,7 = 1750,3 \text{ cm}^2$$

Erhöhung des dunklen Teils um 40%:

$$4375,7 + 1750,3 = 6126,0 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow 6126,0 < 6911,5(A_{\text{hell}})$$

Also ein Erhöhung um mehr als 40%