

Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik I Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Die Axialschnitte von Rotationskörpern sind achsensymmetrische Siebenecke $ABCDE_nFG_n$.

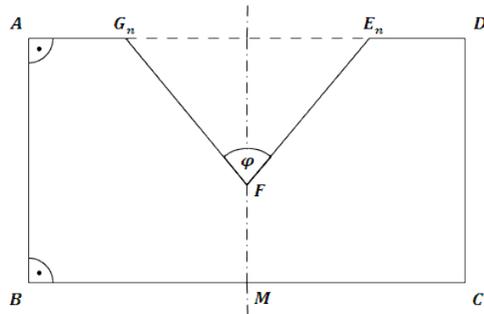
Der Mittelpunkt M der Seite $[BC]$ und der Punkt F liegen auf der Symmetrieachse.

Punkte G_n und E_n auf der Strecke $[AD]$ legen zusammen mit dem Punkt F Winkel

E_nFG_n fest. Die Winkel E_nFG_n haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 112,62^\circ[$.

Es gilt: $\angle MBA = 90^\circ$; $\angle BAG_n = 90^\circ$; $\overline{AB} = 5$ cm; $\overline{BC} = 9$ cm; $\overline{MF} = 2$ cm.

Die Skizze zeigt das Siebeneck $ABCDE_1FG_1$ für $\varphi = 80^\circ$.



Aufgabe A3.1 (1 Punkt)

Begründen Sie durch Rechnung das Maß der oberen Intervallgrenze für φ .

Aufgabe A3.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für das Volumen V der Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt:

$$V(\varphi) = 9 \cdot \pi \cdot \left(11,25 - \tan^2 \frac{\varphi}{2}\right) \text{ cm}^3.$$

Aufgabe A3.3 (1 Punkt)

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers für $\varphi = 100^\circ$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe A3.

Die Axialschnitte von Rotationskörpern sind achsensymmetrische Siebenecke $ABCDE_nFG_n$.

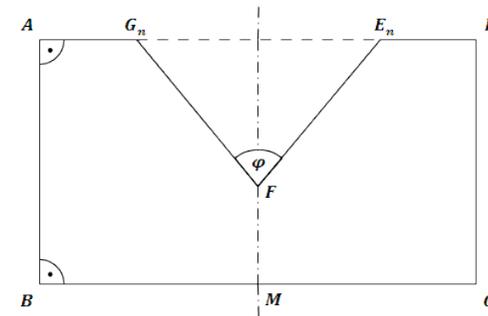
Der Mittelpunkt M der Seite $[BC]$ und der Punkt F liegen auf der Symmetrieachse.

Punkte G_n und E_n auf der Strecke $[AD]$ legen zusammen mit dem Punkt F Winkel

E_nFG_n fest. Die Winkel E_nFG_n haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 112,62^\circ[$.

Es gilt: $\angle MBA = 90^\circ$; $\angle BAG_n = 90^\circ$; $\overline{AB} = 5$ cm; $\overline{BC} = 9$ cm; $\overline{MF} = 2$ cm.

Die Skizze zeigt das Siebeneck $ABCDE_1FG_1$ für $\varphi = 80^\circ$.

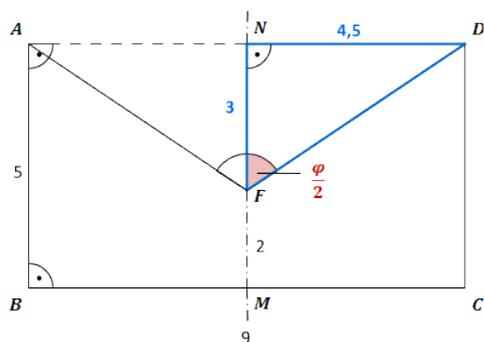


Aufgabe A3.1 (1 Punkte)

Begründen Sie durch Rechnung das Maß der oberen Intervallgrenze für φ .

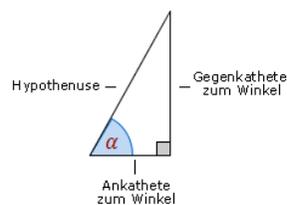
Lösung zu Aufgabe A3.1**Winkel bestimmen**

φ wird maximal, wenn der Punkt E_n zu D und der Punkt G_n zu A wird.



Im rechtwinkligen Dreieck $F D N$ gilt dann:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NF}}$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{4,5}{3}$$

$$\frac{\varphi}{2} = \tan^{-1} \left(\frac{4,5}{3} \right)$$

$$\varphi = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{4,5}{3} \right) \approx 112,62^\circ$$

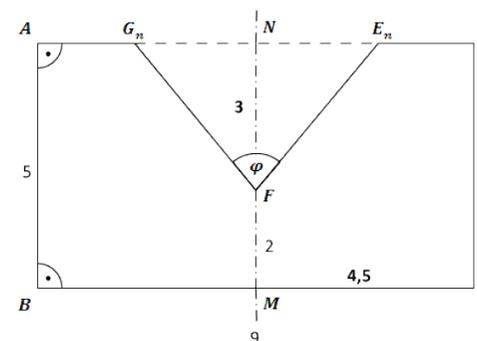
Aufgabe A3.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für das Volumen V der Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt:

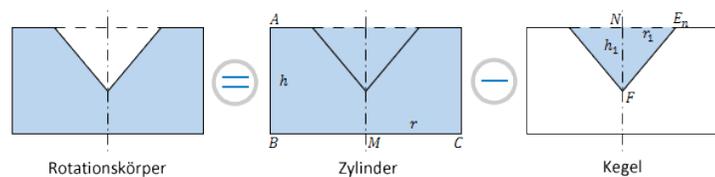
$$V(\varphi) = 9 \cdot \pi \cdot \left(11,25 - \tan^2 \frac{\varphi}{2} \right) \text{ cm}^3.$$

Lösung zu Aufgabe A3.2

Volumen des Rotationskörpers ermitteln

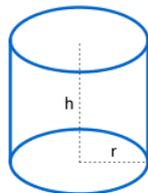


Das Volumen des Rotationskörpers berechnet sich aus der Differenz zwischen dem Volumen eines Zylinders mit Radius $r = \overline{MC} = 4,5$ cm und Höhe $h = \overline{AB} = 5$ cm und dem eines Kegels mit Radius $r_1 = \overline{NE_n}$ und Höhe $h_1 = \overline{NF} = 3$ cm.



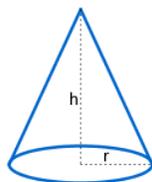
$$V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}}$$

Erläuterung: *Volumen eines Zylinders, Volumen eines Kegels*



Ein Zylinder mit Radius r und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$$



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h , hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Im rechtwinkligen Dreieck NE_nF gilt:

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{NE_n}{NF}$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{NE_n}{3} \quad | \cdot 3$$

$$\Rightarrow \overline{NE_n} = 3 \tan \frac{\varphi}{2}$$

$$V = \pi \cdot (4,5)^2 \cdot 5 - \frac{1}{3} \pi \cdot \left(3 \tan \frac{\varphi}{2}\right)^2 \cdot 3$$

$$V = \pi \cdot 101,25 - \pi \cdot 9 \tan^2 \frac{\varphi}{2}$$

Erläuterung: *Ausklammern*

9π werden ausgeklammert.

$$V = 9\pi \cdot \left(11,25 - \tan^2 \frac{\varphi}{2}\right) \text{ cm}^3$$

Aufgabe A3.3 (1 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers für $\varphi = 100^\circ$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A3.3

Funktionswert berechnen

$$V(\varphi) = 9 \cdot \pi \cdot \left(11,25 - \tan^2 \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$V(100) = 9 \cdot \pi \cdot \left(11,25 - \tan^2 \frac{100}{2}\right) \approx 277,93 \text{ cm}^3$$