

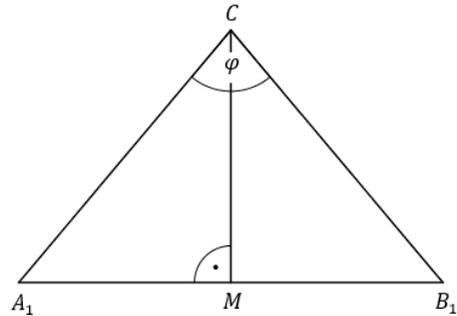
Mittlere-Reife-Prüfung 2016 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Die gleichschenkligen Dreiecke $A_n B_n C$ haben die Basen $[A_n B_n]$ und die gemeinsame Höhe $[CM]$.

Die Winkel $A_n C B_n$ haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 180^\circ[$.

Es gilt: $CM = 5$ cm.



Die Zeichnung zeigt das Dreieck $A_1 B_1 C$ für $\varphi = 80^\circ$.

Aufgabe A1.1 (1 Punkt)

Zeichnen Sie das Dreieck $A_2 B_2 C$ für $\varphi = 50^\circ$ in die Zeichnung zu A 1. ein.

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n B_n C$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$A(\varphi) = 25 \cdot \tan \frac{\varphi}{2} \text{ cm}^2.$$

Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_3 B_3 C$ ist um 25% größer als der Flächeninhalt des Dreiecks $A_2 B_2 C$. Berechnen Sie das Maß φ des Winkels $A_3 C B_3$ des Dreiecks $A_3 B_3 C$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

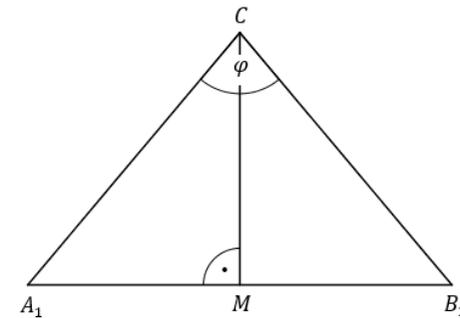
Lösung

Aufgabe A1.

Die gleichschenkligen Dreiecke $A_n B_n C$ haben die Basen $[A_n B_n]$ und die gemeinsame Höhe $[CM]$.

Die Winkel $A_n C B_n$ haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 180^\circ[$.

Es gilt: $CM = 5$ cm.



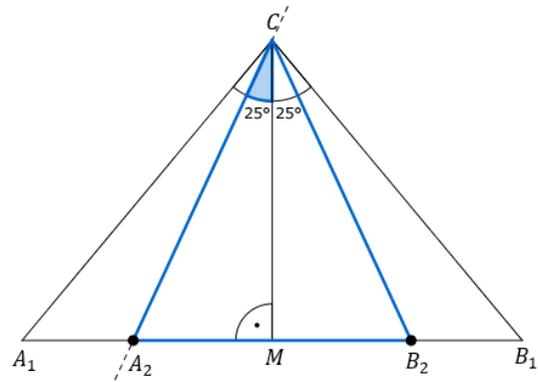
Die Zeichnung zeigt das Dreieck $A_1 B_1 C$ für $\varphi = 80^\circ$.

Aufgabe A1.1 (1 Punkte)

Zeichnen Sie das Dreieck $A_2 B_2 C$ für $\varphi = 50^\circ$ in die Zeichnung zu A 1. ein.

Lösung zu Aufgabe A1.1

Skizze

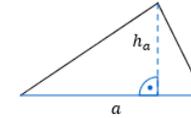
**Aufgabe A1.2** (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n B_n C$ in Abhängigkeit von φ gilt: $A(\varphi) = 25 \cdot \tan \frac{\varphi}{2} \text{ cm}^2$.

Lösung zu Aufgabe A1.2**Flächeninhalt eines Dreiecks**

Flächeninhalt A in Abhängigkeit von φ :

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



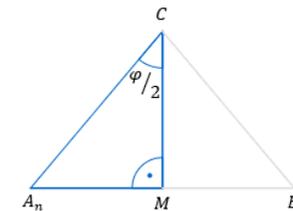
Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

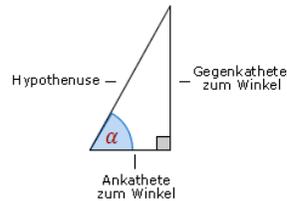
$$A(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot \overline{MC}$$

$$A(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \overline{A_n M} \cdot 5$$



Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $\triangle A_n M C$:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

In diesem Fall ist $\overline{A_n M}$ Gegenkathete und $\overline{M C}$ Ankathete zum Winkel φ .

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{A_n M}}{5} \quad \Rightarrow \quad \overline{A_n M} = 5 \cdot \tan \frac{\varphi}{2}$$

Einsetzen von $\overline{A_n M}$ in $A(\varphi)$:

$$A(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \tan \frac{\varphi}{2} = 25 \cdot \tan \frac{\varphi}{2}$$

Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_3 B_3 C$ ist um 25% größer als der Flächeninhalt des Dreiecks $A_2 B_2 C$. Berechnen Sie das Maß φ des Winkels $A_3 C B_3$ des Dreiecks $A_3 B_3 C$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Winkel bestimmen

$$A_{\Delta A_2 B_2 C} = 25 \cdot \tan 25^\circ$$

$$A_{\Delta A_3 B_3 C} = 25 \cdot \tan \frac{\varphi}{2} \quad (\text{s. Teilaufgabe 1.2})$$

Erläuterung: *Prozentrechnung*

Der Flächeninhalt (Y) des Dreiecks $A_3 B_3 C$ ist um 25% größer als der Flächeninhalt (X) des Dreiecks $A_2 B_2 C$.

$$Y = X + 0,25 \cdot X = (1 + 0,25) \cdot X = 1,25 \cdot X$$

$$A_{\Delta A_3 B_3 C} = 1,25 \cdot A_{\Delta A_2 B_2 C}$$

$$25 \cdot \tan \frac{\varphi}{2} = 1,25 \cdot 25 \cdot \tan 25^\circ \quad : 25$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = 1,25 \cdot \tan 25^\circ \quad | \tan^{-1}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ aus $1,25 \cdot \tan 25^\circ$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } 1,25 \cdot \tan 25^\circ \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$\frac{\varphi}{2} = \tan^{-1} (1,25 \cdot \tan 25^\circ)$$

$$\Rightarrow \varphi \approx 60,47^\circ$$