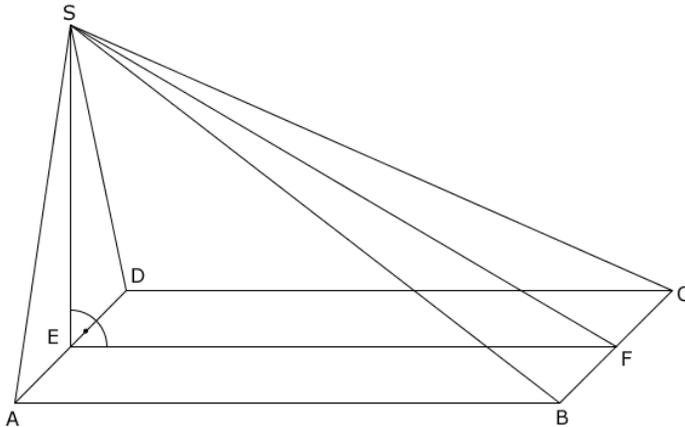


## Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik II Aufgabe A2

### Aufgabe A2.

Das Rechteck  $ABCD$  mit  $\overline{AB} = 12$  cm und  $\overline{BC} = 7$  cm ist die Grundfläche der Pyramide  $ABCD S$  (siehe Zeichnung). Die Spitze  $S$  liegt senkrecht über dem Mittelpunkt  $E$  der Strecke  $[AD]$  mit  $\overline{ES} = 7$  cm. Der Punkt  $F$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $[BC]$ .

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



### Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß  $\varphi$  des Winkels SFE sowie die Länge der Strecke  $[FS]$ .

[Ergebnisse:  $\varphi = 30,26^\circ$ ;  $\overline{FS} = 13,89$  cm]

### Aufgabe A2.2 (1 Punkt)

Der Punkt  $P$  liegt auf der Strecke  $[EF]$  mit  $\overline{EP} = 5$  cm. Für Punkte  $M_n$  auf der Strecke  $[FS]$  gilt:  $\overline{FM_n}(x) = x$  cm mit  $x < 13,89$  und  $x \in \mathbb{R}^+$ . Die Punkte  $M_n$  sind die Mittelpunkte von Strecken  $[Q_n R_n]$  mit  $R_n \in [CS]$ ,  $Q_n \in [BS]$  und  $[Q_n R_n] \parallel [BC]$ . Die Punkte  $P$ ,  $R_n$  und  $Q_n$  sind die Eckpunkte von Dreiecken  $PR_n Q_n$ . Zeichnen Sie das Dreieck  $PR_1 Q_1$  für  $x = 3$  in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

### Aufgabe A2.3 (3 Punkte)

Der Punkt  $M_2$  auf der Strecke  $[FS]$  liegt senkrecht über dem Punkt  $P$ .

Zeichnen Sie  $M_2$  und das Dreieck  $PR_2 Q_2$  in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Bestimmen Sie sodann durch Rechnung den zugehörigen Wert für  $x$  und die Länge der Strecke  $[R_2 Q_2]$ .

[Ergebnis:  $\overline{R_2 Q_2} = 2,92$  cm]

### Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Das Dreieck  $PR_2 Q_2$  ist die Grundfläche der Pyramide  $PR_2 Q_2 F$ .

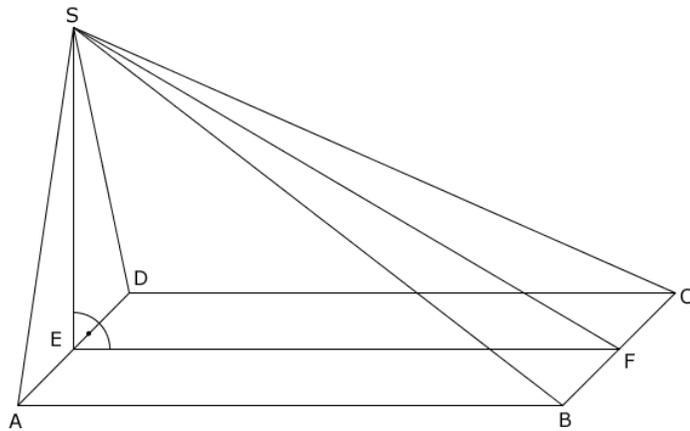
Ermitteln Sie rechnerisch den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide  $PR_2 Q_2 F$  am Volumen der Pyramide  $ABCD S$ .

## Lösung

## Aufgabe A2.

Das Rechteck  $ABCD$  mit  $\overline{AB} = 12$  cm und  $\overline{BC} = 7$  cm ist die Grundfläche der Pyramide  $ABCD S$  (siehe Zeichnung). Die Spitze  $S$  liegt senkrecht über dem Mittelpunkt  $E$  der Strecke  $[AD]$  mit  $\overline{ES} = 7$  cm. Der Punkt  $F$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $[BC]$ .

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



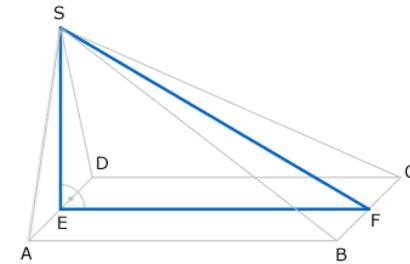
## Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß  $\varphi$  des Winkels SFE sowie die Länge der Strecke  $[FS]$ .

[Ergebnisse:  $\varphi = 30,26^\circ$ ;  $\overline{FS} = 13,89$  cm]

## Lösung zu Aufgabe A2.1

## Winkel bestimmen

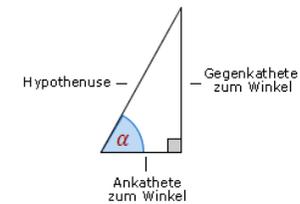


Gegeben:  $\overline{AB} = 12$  cm,  $\overline{BC} = 7$  cm und  $\overline{ES} = 7$  cm

Gesucht:  $\angle SFE = \varphi$

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck  $EFS$ . In diesem gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \varphi = \frac{\overline{ES}}{\overline{EF}}$$

$$\tan \varphi = \frac{7}{12}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel  $\varphi$  aus  $\tan \varphi = \frac{7}{12}$  zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR:  $\frac{7}{12} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{7}{12} \right) \approx 30,26^\circ$$

*Seite eines Dreiecks bestimmen*

Satz des Pythagoras im Dreieck  $EFS$  anwenden:

$$\overline{FS}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{ES}^2$$

$$\overline{FS}^2 = 12^2 + 7^2$$

$$\overline{FS} = \sqrt{12^2 + 7^2}$$

$$\overline{FS} = \sqrt{144 + 49}$$

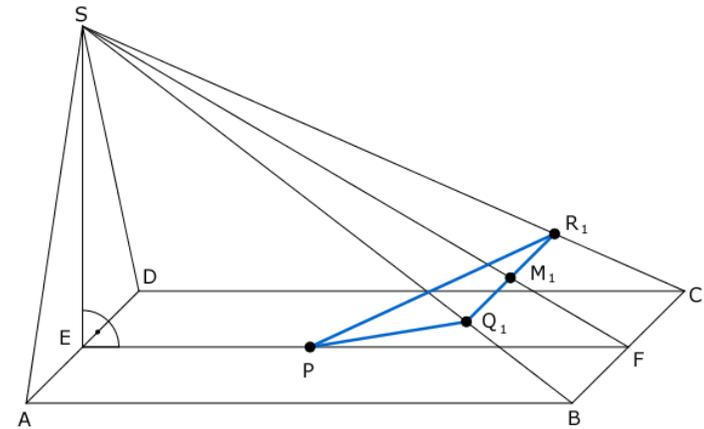
$$\overline{FS} \approx 13,89 \text{ cm}$$

**Aufgabe A2.2** (1 Punkte)

Der Punkt  $P$  liegt auf der Strecke  $[EF]$  mit  $\overline{EP} = 5 \text{ cm}$ . Für Punkte  $M_n$  auf der Strecke  $[FS]$  gilt:  $\overline{FM}_n(x) = x \text{ cm}$  mit  $x < 13,89$  und  $x \in \mathbb{R}^+$ . Die Punkte  $M_n$  sind die Mittelpunkte von Strecken  $[Q_n R_n]$  mit  $R_n \in [CS]$ ,  $Q_n \in [BS]$  und  $[Q_n R_n] \parallel [BC]$ . Die Punkte  $P$ ,  $R_n$  und  $Q_n$  sind die Eckpunkte von Dreiecken  $PR_n Q_n$ . Zeichnen Sie das Dreieck  $PR_1 Q_1$  für  $x = 3$  in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.2

*Skizze*



Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Einzeichnen des Punktes  $P$ :

Antragen von  $\overline{EP} = 5 \text{ cm}$  am Punkt  $E$  auf der Strecke  $[EF]$ .

2) Einzeichnen des Punktes  $M_1$ :

Antragen von  $\overline{FM}_1 = 3 \text{ cm}$  am Punkt  $F$  auf der Strecke  $[FS]$ .

3) Einzeichnen der Strecke  $[Q_1 R_1]$ :

Die Strecke  $[BC]$  wird auf der Strecke  $[FS]$  parallel verschoben bis der Punkt  $M_1$  erreicht wird. Punkt  $Q_1$  liegt auf der Strecke  $[BS]$  und der Punkt  $R_1$  liegt auf der Strecke  $[CS]$ .

4) Einzeichnen des Dreiecks  $PR_1 Q_1$ :

Verbinden der Punkte  $R_1$  und  $Q_1$  mit dem Punkt  $P$ .

**Aufgabe A2.3** (3 Punkte)

Der Punkt  $M_2$  auf der Strecke  $[FS]$  liegt senkrecht über dem Punkt  $P$ .

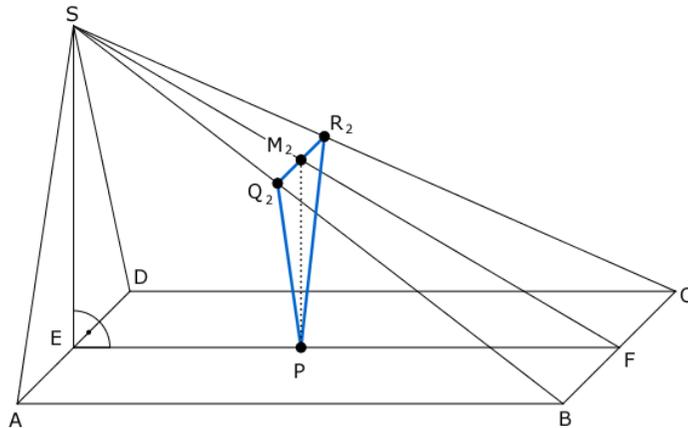
Zeichnen Sie  $M_2$  und das Dreieck  $PR_2 Q_2$  in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Bestimmen Sie sodann durch Rechnung den zugehörigen Wert für  $x$  und die Länge der Strecke  $[R_2 Q_2]$ .

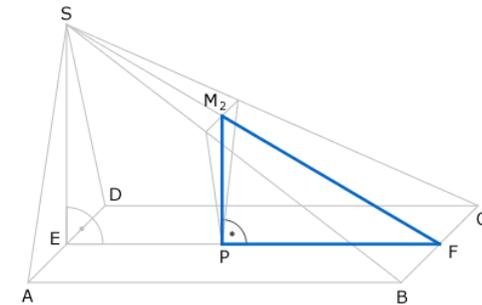
[ Ergebnis:  $\overline{R_2 Q_2} = 2,92 \text{ cm}$  ]

Lösung zu Aufgabe A2.3

## Skizze

Erläuterung: *Einzeichnen*

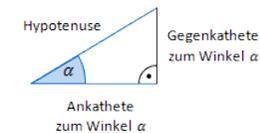
- 1) Einzeichnen des Punktes  $M_2$ :  
Vom Punkt  $P$  aus wird das Lot gefällt bis man die Strecke  $[FS]$  trifft.
- 2) Einzeichnen der Strecke  $[Q_2 R_2]$ :  
Die Strecke  $[Q_1 R_1]$  wird auf der Strecke  $[FS]$  parallel verschoben bis der Punkt  $M_2$  erreicht wird. Punkt  $Q_2$  liegt auf der Strecke  $[BS]$  und der Punkt  $R_2$  liegt auf der Strecke  $[CS]$ .
- 3) Einzeichnen des Dreiecks  $P R_2 Q_2$ :  
Verbinden der Punkte  $R_2$  und  $Q_2$  mit dem Punkt  $P$ .

*Seite eines Dreiecks bestimmen*

Gegeben:  $\overline{PF} = \overline{EF} - \overline{EP} = 12 - 5 = 7$  cm,  $\varphi = 30,26^\circ$  und  $\angle F P M_2 = 90^\circ$

Gesucht:  $\overline{M_2 F} = x$

Im rechtwinkligen Dreieck  $P F M_2$  gilt:

Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*

Der Kosinus eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos 30,26^\circ = \frac{\overline{PF}}{x}$$

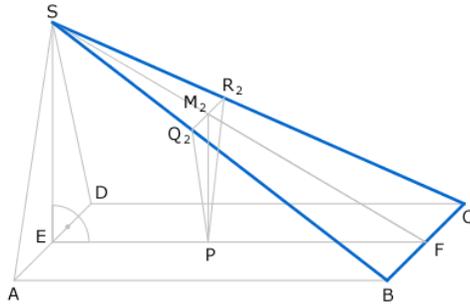
$$\cos 30,26^\circ = \frac{7}{x} \quad | \cdot x$$

$$\cos 30,26^\circ \cdot x = 7 \quad | : \cos 30,26^\circ$$

$$x = \frac{7}{\cos 30,26^\circ}$$

$$x = 8,10 \text{ cm}$$

**Länge einer Strecke**



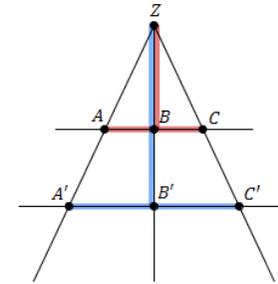
Gegeben:  $\overline{SF} = 13,89 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 7,00 \text{ cm}$  und  $\overline{M_2F} = 8,10 \text{ cm}$

Gesucht:  $\overline{Q_2R_2}$

Wir betrachten das Dreieck  $BCS$ :

Erläuterung:

Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B. folgende Beziehung:



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{B'B}}$$

$$\frac{\overline{SM_2}}{\overline{Q_2R_2}} = \frac{\overline{SF}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{13,89 - 8,10}{\overline{Q_2R_2}} = \frac{13,89}{7} \quad | \cdot 7 \cdot \overline{Q_2R_2}$$

$$5,79 \cdot 7 = 13,89 \cdot \overline{Q_2R_2} \quad | : 13,89$$

$$\overline{Q_2R_2} = \frac{5,79 \cdot 7}{13,89}$$

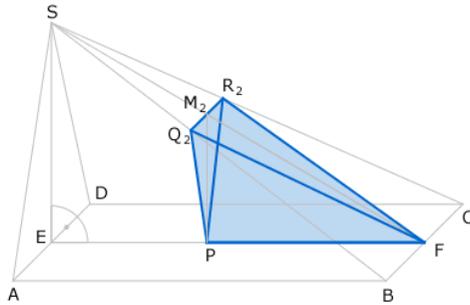
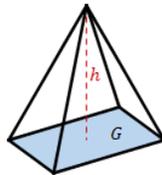
$$\overline{Q_2R_2} = 2,92 \text{ cm}$$

#### Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Das Dreieck  $PR_2Q_2$  ist die Grundfläche der Pyramide  $PR_2Q_2F$ .

Ermitteln Sie rechnerisch den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide  $PR_2Q_2F$  am Volumen der Pyramide  $ABCD S$ .

#### Lösung zu Aufgabe A2.4

**Volumen einer Pyramide**Volumen Pyramide  $ABCD S$ :Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*Eine Pyramide mit Grundfläche  $G$  und Höhe  $h$  hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{ABCD S} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Rechteck } ABCD} \cdot \overline{ES}$$

$$V_{ABCD S} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{ES}$$

$$V_{ABCD S} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 7 \cdot 7$$

$$V_{ABCD S} = 196 \text{ cm}^3$$

Volumen der Pyramide  $V_{P R_2 Q_2 F}$ :

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Die Grundfläche  $G$  ist das Dreieck  $P R_2 Q_2$ .Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

 $h_a$  ist die zur (Grund-)Seite  $a$  zugehörige Höhe.

$$A_{\text{Dreieck } P Q R} = \frac{1}{2} \cdot \overline{Q_2 R_2} \cdot \overline{M_2 P}$$

Zur Berechnung der Länge der Strecke  $\overline{Q_2 R_2}$  wird das rechtwinklige Dreieck  $P F M_2$  betrachtet:Erläuterung: *Satz des Pythagoras*In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten  $a$  und  $b$  und der Hypotenuse  $c$  gilt:  $a^2 + b^2 = c^2$ 

$$x^2 = \overline{P F}^2 + \overline{M_2 P}^2$$

$$8,1^2 = 7^2 + \overline{M_2 P}^2$$

$$\overline{M_2 P} = \sqrt{8,1^2 - 7^2} = 4,08 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow A_{\text{Dreieck } P Q_2 R_2} = \frac{1}{2} \cdot 2,92 \cdot 4,08 = 5,96 \text{ cm}^2$$

Somit lässt sich nun auch das Volumen der Pyramide  $V_{P R_2 Q_2 F}$  berechnen:

$$V_{P R_2 Q_2 F} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Dreieck } P Q_2 R_2} \cdot h$$

$$V_{P R_2 Q_2 F} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,92 \cdot 4,08 \cdot 7$$

$$\Rightarrow V_{P R_2 Q_2 F} = 13,90 \text{ cm}^3$$

**Prozentrechnung**

Prozentualen Anteil des Volumen der Pyramide  $V_{P_{R_2 Q_2 F}}$  am Volumens der Pyramide  $V_{A B C D S}$  bestimmen:

$$\frac{V_{P_{R_2 Q_2 F}}}{V_{A B C D S}} \cdot 100\% = 7,09\%$$