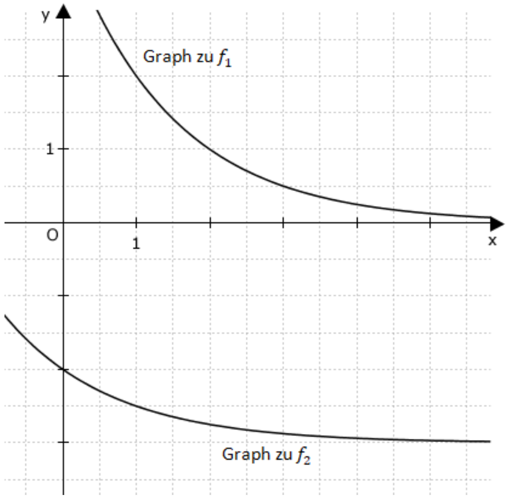
Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Gegeben sind die Funktionen f_1 mit der Gleichung $y = 4 \cdot 0,5^x$ und f_2 mit der Gleichung $y = 4 \cdot 0,5^{x+2} - 3$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
Punkte $A_n\ (x|4 \cdot 0,5^x)$ auf dem Graphen zu f_1 und Punkte $B_n\ \left(x|4 \cdot 0,5^{x+2} - 3\right)$ auf dem Graphen zu f_2 haben dieselbe Abzisse x. Die Strecken $[A_n\, B_n]$ sind für $x \in \mathbb{R}$ die Basen von gleichschenkligen Dreiecken $A_n\, B_n\, C_n$. Für die Höhen $[M_n\, C_n]$ der Dreiecke $A_n\, B_n\, C_n$ gilt: $\overline{M_n\, C_n} = 3$ LE.



Aufgabe A3.1 (1 Punkt)

Zeichnen Sie das Dreieck $A_1\, B_1\, C_1$ für $x = 1$ in das Koordinatensystem ein.

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[A_n\, B_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_n\, B_n}\ (x) = (3 \cdot 0,5^x + 3)$ LE.

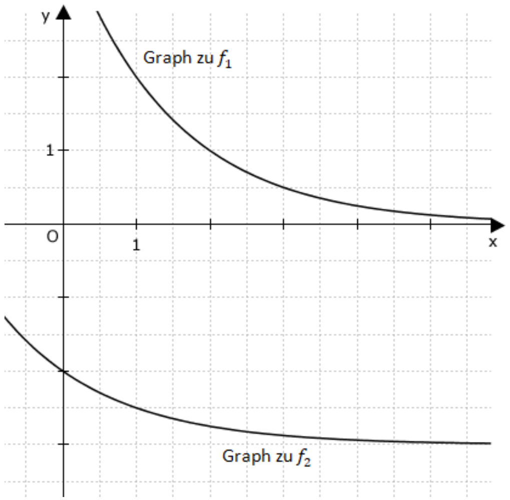
Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Das Dreieck $A_2\, B_2\, C_2$ hat einen Flächeninhalt von 15 FE.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x.

Lösung

Aufgabe A3.

Gegeben sind die Funktionen f_1 mit der Gleichung $y = 4 \cdot 0{,}5^x$ und f_2 mit der Gleichung $y = 4 \cdot 0{,}5^{x+2} - 3$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
Punkte $A_n\ (x|4 \cdot 0{,}5^x)$ auf dem Graphen zu f_1 und Punkte $B_n\ \left(x|4 \cdot 0{,}5^{x+2} - 3\right)$ auf dem Graphen zu f_2 haben dieselbe Abzisse x. Die Strecken $[A_n\,B_n]$ sind für $x \in \mathbb{R}$ die Basen von gleichschenkligen Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$. Für die Höhen $[M_n\,C_n]$ der Dreiecke $A_n\,B_n\,C_n$ gilt: $\overline{M_n\,C_n} = 3$ LE.

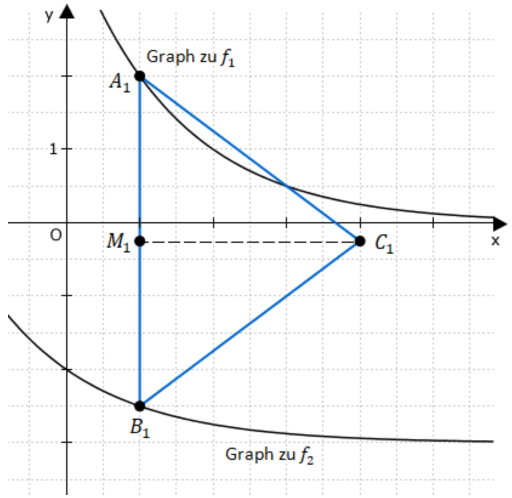


Aufgabe A3.1 (1 Punkte)

Zeichnen Sie das Dreieck $A_1\,B_1\,C_1$ für $x = 1$ in das Koordinatensystem ein.

Lösung zu Aufgabe A3.1

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Antragen des Punktes A_1, indem man auf der x- Achse zu $x = 1$ geht und dann nach oben bis man auf den Graphen der Funktion f_1 stößt.

2) Antragen des Punktes B_1, indem man auf der x- Achse zu $x = 1$ geht und dann nach unten bis man auf den Graphen der Funktion f_2 stößt.

3) Einzeichnen des Mittelpunktes M_1 der Strecke $[A_1\,B_1]$, indem die Länge $\overline{A_1\,B_1}$ misst und durch 2 teilt.

4) Einzeichnen der Höhe $[M_1\,C_1]$ mit $\overline{M_1\,C_1} = 3$ LE.

5) Verbinden der Punkte A_1,B_1 und C_1 zum Dreieck $A_1\,B_1\,C_1$.

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[A_n\,B_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_n\,B_n}\ (x) = (3 \cdot 0{,}5^x + 3)$ LE.

Lösung zu Aufgabe A3.2

Länge einer Strecke

Gegeben: $A_n\ (x|4\cdot 0,5^x)$ und $B_n\ \left(x|4\cdot 0,5^{x+2}-3\right)$

Gesucht: $\overline{A_n\,B_n}(x)$

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> Da die Strecken $[A_n\,B_n]$ parallel zur y- Achse verlaufen, kann $\overline{A_n\,B_n}$ berechnet werden, indem $y_{A_n}-y_{B_n}$ berechnet wird.
>
> Es gilt also: $\overline{A_n\,B_n}=y_{A_n}-y_{B_n}$

$\overline{A_n\,B_n}=y_{A_n}-y_{B_n}$

$\overline{A_n\,B_n}=4\cdot 0,5^x-(4\cdot 0,5^{x+2}-3)$

$\overline{A_n\,B_n}=4\cdot 0,5^x-4\cdot 0,5^{x+2}+3$

> Erläuterung: *Potenzregel*
>
> Es gilt: $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$ für alle $a\in\mathbb{R}$
>
> In unserem Fall: $0,5^{x+2}=0,5^x\cdot 0,5^2$

$\overline{A_n\,B_n}=4\cdot 0,5^x-4\cdot 0,5^x\cdot 0,5^2+3$

$\overline{A_n\,B_n}=4\cdot 0,5^x-4\cdot 0,5^x\cdot 0,25+3$

$\overline{A_n\,B_n}=4\cdot 0,5^x-1\cdot 0,5^x+3$

$\overline{A_n\,B_n}=3\cdot 0,5^x+3$

$\Rightarrow \overline{A_n\,B_n}(x)=(3\cdot 0,5^x+3)$ LE

Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Das Dreieck $A_2\,B_2\,C_2$ hat einen Flächeninhalt von 15 FE.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x.

Lösung zu Aufgabe A3.3

Flächeninhalt eines Dreiecks

Gegeben: $\overline{A_n\,B_n}=(3\cdot 0,5^x+3)$ LE und $\overline{M_n\,C_n}=3$ LE

Gesucht: Flächeninhalt A des Dreiecks $A_2\,B_2\,C_2$

> Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*
>
> Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:
>
> $A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a$
>
> h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.
>
> In unserem Fall ergibt sich somit der folgende Ansatz:
>
> $A=\frac{1}{2}\cdot\overline{A_n\,B_n}\cdot\overline{M_n\,C_n}$

$A=\frac{1}{2}\cdot\overline{A_n\,B_n}\cdot\overline{M_n\,C_n}$

$A=\frac{1}{2}\cdot(3\cdot 0,5^x+3)\cdot 3$

> Erläuterung: *Gleichsetzen*
>
> Da der Flächeninhalt $A_{A_2\,B_2\,C_2}=15$ FE beträgt, gilt:
>
> $\frac{1}{2}\cdot(3\cdot 0,5^x+3)\cdot 3=15$
>
> Anschließend wird nach x aufgelöst.

$\frac{1}{2}\cdot(3\cdot 0,5^x+3)\cdot 3=15|:3$

$\frac{1}{2}\cdot(3\cdot 0,5^x+3)=5\quad|\cdot 2$

$3\cdot 0,5^x+3=10\quad|-3$

$3\cdot 0,5^x=7|:3$

$0,5^x=\frac{7}{3}\quad|\log_{0,5}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $0,5^x$ kann durch den Logarithmus $\log 0,5$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$

$x = \log_{0,5} \dfrac{7}{3}$

$x \approx -1,22$