

Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_1 an und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_1 für $x \in [1, 5; 11]$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leq x \leq 12$; $-6 \leq y \leq 6$

Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Der Graph der Funktion f_1 wird durch Achsenspiegelung an der x-Achse und anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor \vec{v} auf den Graphen der Funktion f_2 mit der Gleichung $y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) abgebildet.

Geben Sie die Koordinaten des Verschiebungsvektors \vec{v} an und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_2 für $x \in [1, 5; 11]$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Aufgabe B1.3 (4 Punkte)

Punkte A_n ($x | 1,5 \cdot \log_{0,5} x$) auf dem Graphen zu f_2 haben dieselbe Abszisse x wie Punkte C_n ($x | -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$) auf dem Graphen zu f_1 . Sie sind für $x > 1,62$ zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Rauten $A_n B_n C_n D_n$.

Es gilt: $\overline{B_n D_n} = 6$ LE.

Zeichnen Sie die Rauten $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = 2,5$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 8,5$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Zeigen Sie sodann, dass für die Länge der Strecken $[A_n C_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_n C_n}(x) = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x)$ LE.

Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Die Raute $A_3 B_3 C_3 D_3$ ist ein Quadrat. Berechnen Sie die zugehörige x -Koordinate des Punktes A_3 . Runden Sie dabei auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Diagonalschnittpunkte M_n der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:

$$M_n \left(x | 0,75 \cdot \log 0,5 \left(\frac{x}{x-1} \right) \right).$$

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Geben Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte D_n der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n an.

Lösung

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f_1 an und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_1 für $x \in [1, 5; 11]$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leq x \leq 12$; $-6 \leq y \leq 6$

Lösung zu Aufgabe B1.1

Definitionsbereich bestimmen

$$f_1 : y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion $y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$ ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche x -Werte gilt: $x - 1 > 0$.

$$x - 1 > 0 \quad | + 1$$

$$x > 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{D} =]1; \infty[$$

Wertemenge einer Funktion

Die Wertemenge jeder Logarithmusfunktion besteht aus allen reellen Zahlen.

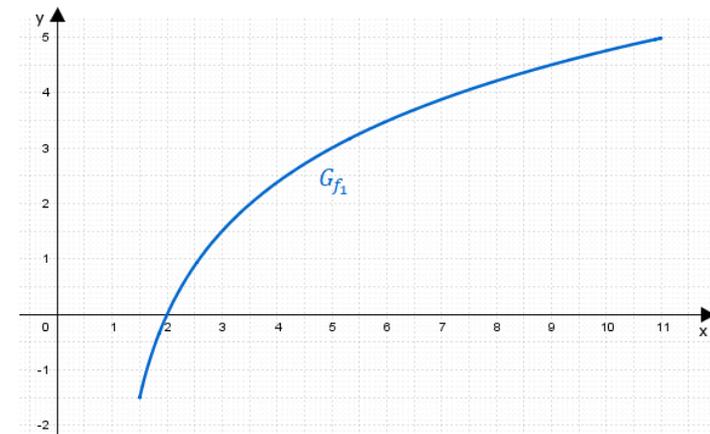
$$\Rightarrow \mathbb{W}_f = \mathbb{R}$$

Skizze

$f_1 : y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$ wird für $x \in [1, 5; 11]$ in ein Koordinatensystem gezeichnet.

Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Erstellen einer Werteballe mit Hilfe des Taschenrechners für $x \in [1, 5; 11]$
- 2) Einzeichnen der Punkte und verbinden der Punkte zum Graphen der Funktion f_1



Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Der Graph der Funktion f_1 wird durch Achsenspiegelung an der x -Achse und anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor \vec{v} auf den Graphen der Funktion f_2 mit der Gleichung $y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) abgebildet.

Geben Sie die Koordinaten des Verschiebungsvektors \vec{v} an und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_2 für $x \in [1, 5; 11]$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.2

Vektor bestimmen

Gegeben: $f_1 : y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$ und $f_2 : y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$

Gesucht: \vec{v}

Das Nachvollziehen des Übergangs der Funktion $f_1(x)$ auf die Funktion $f_2(x)$ liefert den Verschiebungsvektor \vec{v} .

Erläuterung: *Spiegelung von Funktionsgraphen, Verschiebung von Funktionsgraphen*

Wird die Funktion $f_1 : y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$ an der x -Achse gespiegelt, so gilt:

$$f^*(x) = -1 \cdot f_1(x) = -1 \cdot (-1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)) = 1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$$

Eine Vektorverschiebung der Funktion $f_2 : y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$ um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ würde folgende Funktion ergeben:

$$f'(x) = 1,5 \cdot \log_{0,5}(x + a) + b$$

Durch Vergleich der Funktionen $f^*(x)$ und $f'(x)$ lässt sich erkennen, dass $a = -1$ und $b = 0$.

Somit lautet der Verschiebungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

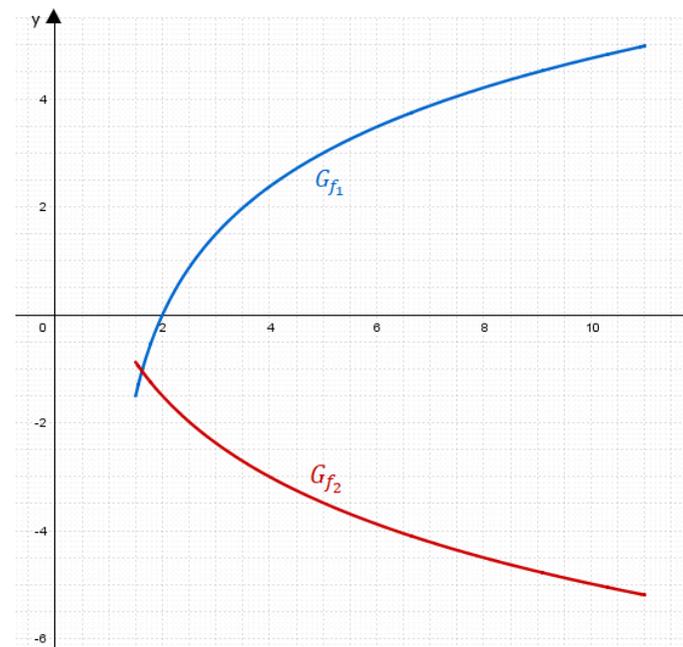
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Skizze

$f_2 : y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$ wird ebenfalls für $x \in [1,5; 11]$ in ein Koordinatensystem gezeichnet.

Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Erstellen einer Werteballe mit Hilfe des Taschenrechners für $x \in [1,5; 11]$
- 2) Einzeichnen der Punkte und verbinden der Punkte zum Graphen der Funktion f_2



Aufgabe B1.3 (4 Punkte)

Punkte A_n ($x | 1,5 \cdot \log_{0,5} x$) auf dem Graphen zu f_2 haben dieselbe Abszisse x wie Punkte C_n ($x | -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$) auf dem Graphen zu f_1 . Sie sind für $x > 1,62$ zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Rauten $A_n B_n C_n D_n$.

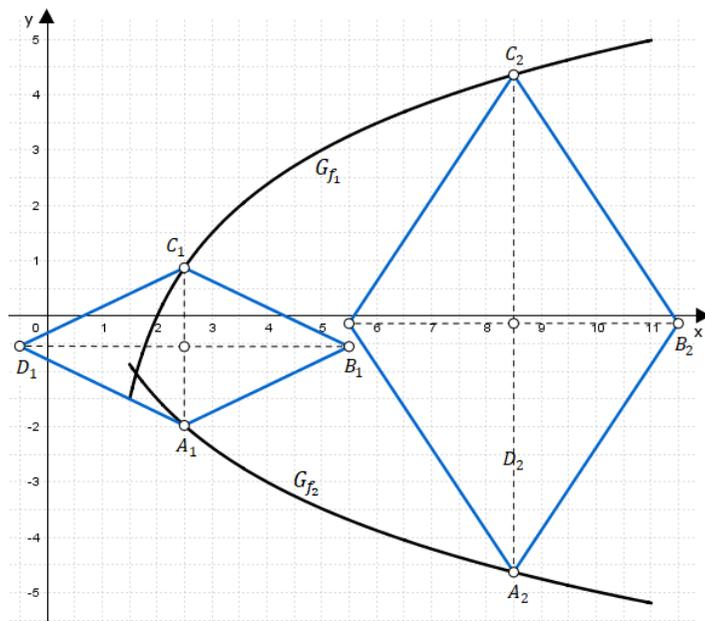
Es gilt: $\overline{B_n D_n} = 6$ LE.

Zeichnen Sie die Rauten $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = 2,5$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 8,5$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Zeigen Sie sodann, dass für die Länge der Strecken $[A_n C_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_n C_n}(x) = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x)$ LE.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) man geht auf der x -Achse zu $x = 2,5$ und dann nach oben bis man auf den Graphen der Funktion f_1 stößt. Hier liegt der Punkt C_1 .
- 2) man geht auf der x -Achse zu $x = 2,5$ und dann nach unten bis man auf den Graphen der Funktion f_2 stößt. Hier liegt der Punkt A_1 .
- 3) Vom Mittelpunkt der Strecke $[A_1 C_1]$ gehe man 3 LE nach rechts und links. Hier befinden sich die Punkte B_1 und D_1 .

Konstruktion der Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ erfolgt analog.

Länge einer Strecke

Die Strecken $[A_n C_n]$ verlaufen parallel zur y - Achse. Es gilt:

$$\overline{A_n C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1) - 1,5 \cdot \log_{0,5} x$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der Term $-1,5$ wird ausgeklammert.

$$\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot (\log_{0,5}(x-1) + \log_{0,5} x)$$

Erläuterung: *Logarithmus einer Summe*

$$\log_a s + \log_a t = \log_a (s \cdot t)$$

$$\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot (\log_{0,5}(x-1) \cdot x)$$

$$\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot (\log_{0,5}(x^2 - x))$$

$$\Rightarrow \overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x) \text{ LE}$$

Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Die Raute $A_3 B_3 C_3 D_3$ ist ein Quadrat. Berechnen Sie die zugehörige x -Koordinate des Punktes A_3 . Runden Sie dabei auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $\overline{B_n D_n} = 6 \text{ LE}$ und $\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x) \text{ LE}$

Gesucht: $\overline{A_3 C_3}$

Erläuterung: *Eigenschaften eines Quadrats*

In einem Quadrat sind die Längen der Diagonalen gleich lang.

In unserem Fall gilt also:

$$\overline{B_3 D_3} = \overline{A_3 C_3} \text{ und somit } \overline{A_3 C_3} = 6 \text{ LE.}$$

$$-1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x) = 6 \mid : (-1,5)$$

$$\log_{0,5}(x^2 - x) = -4 \quad | \text{entlogarithmieren}$$

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus $\log_{0,5}$ kann durch die Exponentialfunktion $0,5^x$ aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } \log_{0,5} x = 1 \iff 0,5^{\log_{0,5} x} = 0,5^1 \iff x = 0,5$$

$$x^2 - x = 0,5^{-4}$$

$$x^2 - x = 16 \quad | -16$$

$$x^2 - x - 16 = 0 \quad | \text{Mitternachtsformel anwenden}$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{65}}{2}$$

$$x_1 \approx 4,53 \quad \text{und} \quad (x_2 \approx -3,53) \text{ da } x > 1,62$$

$$\Rightarrow x_{A_3} = 4,53$$

Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Diagonalschnittpunkte M_n der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:

$$M_n \left(x \mid 0,75 \cdot \log_{0,5} \left(\frac{x}{x-1} \right) \right).$$

Lösung zu Aufgabe B1.5

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A_n (x \mid 1,5 \cdot \log_{0,5} x)$ und $C_n (x \mid -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1))$

Gesucht: Diagonalschnittpunkte M_n

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt einer Strecke $[AB]$ mit den Punkten $A(x_A \mid y_A)$ und $B(x_B \mid y_B)$ berechnet sich mit der Formel:

$$M_{[AB]} = \left(\frac{x_A + x_B}{2} \mid \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$M_n = \left(\frac{x + x}{2} \mid \frac{1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)}{2} \right)$$

$$M_n = \left(\frac{2x}{2} \mid \frac{1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)}{2} \right)$$

$$M_n = \left(x \mid \frac{1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)}{2} \right)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

Da im Term $1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)$ in beiden Summanden der Faktor $1,5$ vorkommt, wird er ausgeklammert. Somit gilt:

$$1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1) = 1,5 \cdot (\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x-1))$$

$$M_n = \left(x \mid \frac{1,5 \cdot (\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x-1))}{2} \right)$$

$$M_n = (x \mid 0,75 \cdot (\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x-1)))$$

Erläuterung: *Logarithmus eines Quotienten*

Eine Differenz von Logarithmen gleicher Basis kann auch als Logarithmus des Quotienten der Argumente ausgedrückt werden.

Beispiel:

$$\log(3) - \log(4) = \log\left(\frac{3}{4}\right) = -0,125$$

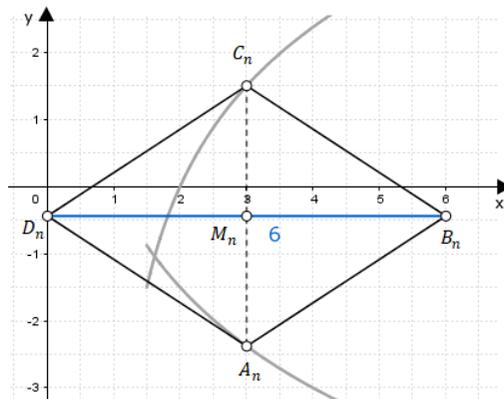
$$M_n = \left(x \mid 0,75 \cdot \log_{0,5} \frac{x}{x-1}\right)$$

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Geben Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte D_n der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n an.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen



Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit der Abszisse x der Punkte A_n bestimmen:

Erläuterung: *Koordinaten von Punkten in Abhängigkeit von der Abszisse anderer Punkte*

Da die Punkte M_n die Mittelpunkte der Strecke $[B_n D_n]$ sind und $\overline{B_n D_n} = 6$ LE gilt:

$$x_D = x_M - 3$$

Da der Punkt M_n die selbe x -Koordinate besitzt wie der Punkt A_n , gilt wiederum:

$$x_D = x_A - 3$$

$$x_D = x_A - 3$$

Für die y -Koordinate des Punktes D_n gilt: $y_D = 0,75 \cdot \log_{0,5} \left(\frac{x_A}{x_A - 1}\right)$

Erläuterung: *Koordinaten von Punkten in Abhängigkeit von der Abszisse anderer Punkte*

Die Punkte D_n haben die selbe y -Koordinate wie die Punkte M_n , da die Strecke $[B_n D_n]$ parallel zur x -Achse verläuft.

Die Punkte D_n haben also die folgenden Koordinaten: $D_n \left(x_A - 3 \mid 0,75 \cdot \log_{0,5} \left(\frac{x_A}{x_A - 1}\right)\right)$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die x -Koordinate $x_A - 3$ von D_n wird nach x_A aufgelöst. Anschließend wird der Term in die y -Koordinate von D_n eingesetzt.

$$\begin{aligned} x^* &= x_A - 3 \quad | +3 \\ x^* + 3 &= x_A \end{aligned}$$

$$y_D = 0,75 \cdot \log_{0,5} \left(\frac{x_A}{x_A - 1}\right)$$

$$y^* = 0,75 \cdot \log_{0,5} \left(\frac{x^* + 3}{(x^* + 3) - 1}\right)$$

$$y^* = 0,75 \cdot \log_{0,5} \left(\frac{x^* + 3}{x^* + 2}\right)$$

Somit hat der Trägergraph die Gleichung $y = 0,75 \cdot \log_{0,5} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)$.