Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik II Aufgabe A2

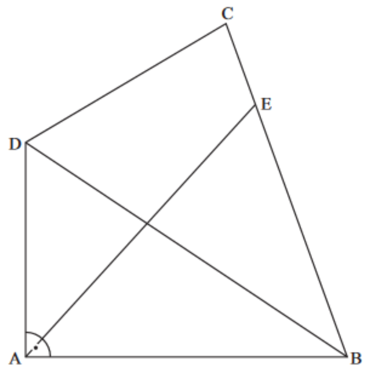
Aufgabe A2.

Die Zeichnung zeigt das Viereck ABCD.

Es gilt:

$\overline{AB} = 7,8$ cm; $\overline{AD} = 5,2$ cm; $\overline{BC} = 8,6$ cm

$\measuredangle BAD = 90°$; $\measuredangle CBA = 70°$



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Diagonalen [BD] und den Flächeninhalt A des Dreiecks BCD.
$\left[\text{ Ergbnisse: } \overline{BD} = 9,4 \text{ cm}; A = 23,9 \text{ cm}^2\right]$

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Der Punkt E liegt auf der Strecke [BC]. Die Dreiecke ABE und BCD besitzen den gleichen Flächeninhalt.
Berechnen Sie die Länge der Strecke [AE].
$\left[\text{ Teilergbnis: } \overline{BE} = 6,5 \text{ cm; Ergebnis: } \overline{AE} = 8,3 \text{ cm}\right]$

Aufgabe A2.3 (3 Punkte)

Der Kreis um E mit dem Radius 3 cm schneidet die Strecke [AE] im Punkt P und die Strecke [BE] im Punkt Q.

Zeichnen Sie den Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ}$ in die Zeichnung zu A 2.0 ein.
Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Kreissektors, der durch die Strecken [QE], [EP] und den Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ}$ begrenzt wird.

Lösung

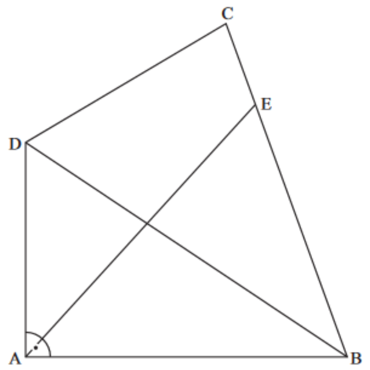
Aufgabe A2.

Die Zeichnung zeigt das Viereck ABCD.

Es gilt:

$\overline{\mathrm{AB}} = 7,8$ cm; $\overline{\mathrm{AD}} = 5,2$ cm; $\overline{\mathrm{BC}} = 8,6$ cm

$\measuredangle \mathrm{BAD} = 90°$; $\measuredangle \mathrm{CBA} = 70°$



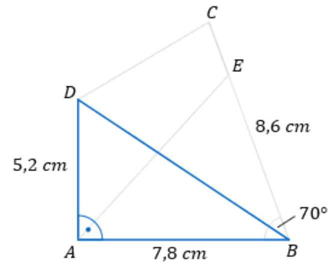
Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Diagonalen [BD] und den Flächeninhalt A des Dreiecks BCD.
$\left[\right.$ Ergbnisse: $\overline{\mathrm{BD}} = 9,4$ cm; $A = 23,9$ cm$^2\left.\right]$

Lösung zu Aufgabe A2.1

Länge einer Strecke



Gegeben: $\overline{\mathrm{AB}} = 7,8$ cm ; $\overline{\mathrm{AD}} = 5,2$ cm

Gesucht: $\overline{\mathrm{BD}}$

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

In diesem Fall ist $a = \overline{\mathrm{AB}}$, $b = \overline{\mathrm{AD}}$ und $c = \overline{\mathrm{BD}}$.

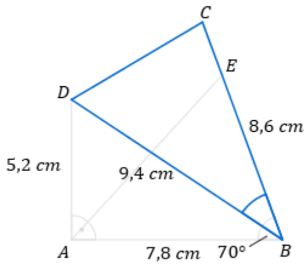
$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AD}}^2$

$\overline{\mathrm{BD}}^2 = 7,8^2 + 5,2^2 \quad |\sqrt{}$

$\overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{7,8^2 + 5,2^2}$

$\overline{\mathrm{BD}} = 9,4$ cm

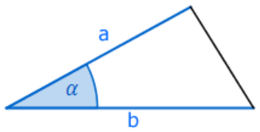
Flächeninhalt eines Dreiecks



Gegeben: $\overline{\mathrm{BD}} = 9,4$ cm und $\overline{\mathrm{BC}} = 8,6$ cm

Gesucht: Flächeninhalt des Dreiecks BCD

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

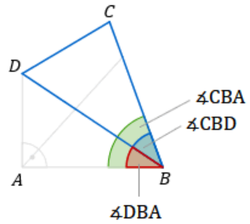
$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{\mathrm{BCD}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{BD}} \cdot \overline{\mathrm{BC}} \cdot \sin\measuredangle\mathrm{CBD}$$

$$A_{\mathrm{BCD}} = \frac{1}{2} \cdot 9,4 \cdot 8,6 \cdot \sin\measuredangle\mathrm{CBD}$$

Nun muss noch der Winkel $\measuredangle$CBD berechnet werden.

Erläuterung: *Erläuterung*

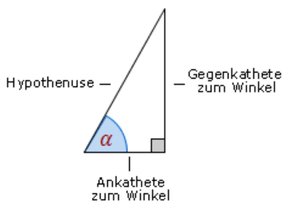


$\measuredangle\mathrm{CBD} = \measuredangle\mathrm{CBA} - \measuredangle\mathrm{DBA}$

Zunächst muss also der Winkel $\measuredangle$DBA berechnet werden.

Berechnung des Winkels $\measuredangle$DBA:

Erläuterung:



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\measuredangle\mathrm{DBA} = \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

$\tan\measuredangle \mathrm{DBA} = \frac{5,2}{7,8}$

$\Rightarrow \measuredangle \mathrm{DBA} = 33,7°$

Somit ergibt sich für den Winkel $\measuredangle$CBD:

$\measuredangle \mathrm{CBD} = \measuredangle \mathrm{CBA} - \measuredangle \mathrm{DBA}$

$\measuredangle \mathrm{CBD} = 70° - 33,7°$

$\measuredangle \mathrm{CBD} = 36,3°$

Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks BCD:

$A_{\mathrm{BCD}} = \frac{1}{2} \cdot 9,4 \cdot 8,6 \cdot \sin\measuredangle \mathrm{CBD}$

$A_{\mathrm{BCD}} = \frac{1}{2} \cdot 9,4 \cdot 8,6 \cdot \sin 36,3°$

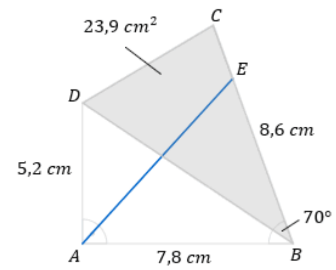
$A_{\mathrm{BCD}} = 23,9\ \mathrm{cm}^2$

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Der Punkt E liegt auf der Strecke [BC]. Die Dreiecke ABE und BCD besitzen den gleichen Flächeninhalt.
Berechnen Sie die Länge der Strecke [AE].
$\left[\ \text{Teilergbnis: } \overline{\mathrm{BE}} = 6,5\ \mathrm{cm};\ \text{Ergebnis: } \overline{\mathrm{AE}} = 8,3\ \mathrm{cm}\right]$

Lösung zu Aufgabe A2.2

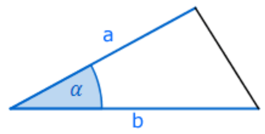
Länge einer Strecke



Gegeben: $\overline{\mathrm{AB}} = 7,8$ cm, $\measuredangle \mathrm{EBA} = 70°$ und $A_{\mathrm{BCD}} = 23,9\ \mathrm{cm}^2$

Gesucht: $\overline{\mathrm{AE}}$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$

$A_{\mathrm{ABE}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{AB}} \cdot \overline{\mathrm{BE}} \cdot \sin\measuredangle \mathrm{EBA}$

$A_{\mathrm{ABE}} = \frac{1}{2} \cdot 7,8 \cdot \overline{\mathrm{BE}} \cdot \sin 70°$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da $A_{\mathrm{BCD}} = A_{\mathrm{ABE}}$ ist $A_{\mathrm{ABE}} = 23,9\ \mathrm{cm}^2$.

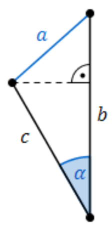
$23,9 = \frac{1}{2} \cdot 7,8 \cdot \overline{\text{BE}} \cdot \sin 70° \quad | : \left(\frac{1}{2} \cdot 7,8 \cdot \sin 70°\right)$

$\frac{23,9}{\frac{1}{2} \cdot 7,8 \cdot \sin 70°} = \overline{\text{BE}}$

$6,5 = \overline{\text{BE}}$

Betrachtet man nun das Dreieck ABE so gilt:

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$\overline{\text{AE}}^2 = \overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BE}}^2 - 2 \cdot \overline{\text{AB}} \cdot \overline{\text{BE}} \cdot \cos\angle\text{EBA}$

$\overline{\text{AE}} = \sqrt{\overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{BE}}^2 - 2 \cdot \overline{\text{AB}} \cdot \overline{\text{BE}} \cdot \cos\angle\text{EBA}}$

$\overline{\text{AE}} = \sqrt{7,8^2 + 6,5^2 - 2 \cdot 7,8 \cdot 6,5 \cdot \cos 70°}$

$\Rightarrow \quad \overline{\text{AE}} = 8,3 \text{ cm}$

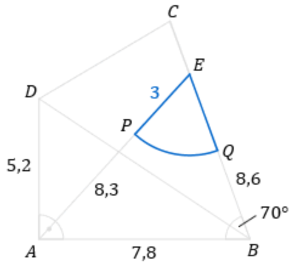
Aufgabe A2.3 (3 Punkte)

Der Kreis um E mit dem Radius 3 cm schneidet die Strecke [AE] im Punkt P und die Strecke [BE] im Punkt Q.

Zeichnen Sie den Kreisbogen $\overset{\frown}{\text{PQ}}$ in die Zeichnung zu A 2.0 ein.
Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Kreissektors, der durch die Strecken [QE], [EP] und den Kreisbogen $\overset{\frown}{\text{PQ}}$ begrenzt wird.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

- Beim Punkt E einstechen und eine Länge von 3 cm auf der Strecke [AE] antragen. Hier befindet sich der Punkt P.

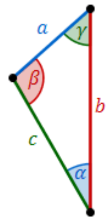
- Der Schnittpunkt der Kreislinie um Punkt E mit $r = 3$ cm und der Strecke [EB] ergibt Punkt Q.

Flächeninhalt einer geometrischen Figur

Gegeben: $\overline{\text{EP}} = 3$ cm

Gesucht: Flächeninhalt des Kreissekktors A_{EPQ}

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck ABE gilt somit: $\frac{\overline{\text{AB}}}{\sin\measuredangle\text{AEB}} = \frac{\overline{\text{BE}}}{\sin\measuredangle\text{BAE}} = \frac{\overline{\text{AE}}}{\sin\measuredangle\text{EBA}}$

$$\frac{\overline{\text{AB}}}{\sin\measuredangle\text{AEB}} = \frac{\overline{\text{AE}}}{\sin\measuredangle\text{EBA}}$$

$$\frac{7,8}{\sin\measuredangle\text{AEB}} = \frac{8,3}{\sin 70^\circ} \qquad |\cdot\sin\measuredangle\text{AEB}$$

$$7,8 = \frac{8,3\cdot\sin\measuredangle\text{AEB}}{\sin 70^\circ} \qquad |\cdot\sin 70^\circ$$

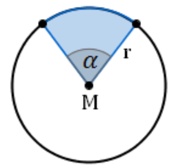
$$7,8\cdot\sin 70^\circ = 8,3\cdot\sin\measuredangle\text{AEB} \qquad |:8,3$$

$$\frac{7,8\cdot\sin 70^\circ}{8,3} = \sin\measuredangle\text{AEB}$$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle\text{AEB} = 62,0^\circ$$

Nun kann der Flächeninhalt des Kreissektors A_{EPQ} berechnet werden:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2\cdot\pi\cdot\frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2\cdot\pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an

$$A_{\text{EPQ}} = 3^2\cdot\pi\cdot\frac{62^\circ}{360^\circ} = 4,9\ \text{cm}^2$$