Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik II Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-2|19)$ und $Q(4|-5)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = 0,5x^2 + b\,x + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g besitzt die Gleichung $y = 0,5x - 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c, dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,5x^2 - 5x + 7$ besitzt.
Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g für $x \in [0; 10]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $0 \le x \le 10$; $-6 \le y \le 8$

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n\ \left(x|0,5x^2 - 5x + 7\right)$ auf der Parabel p und Punkte $C_n\ (x|0,5x - 2)$ auf der Gerade g besitzen dieselbe Abszisse x. Diese Punkte bilden zusammen mit Punkten B_n und D_n Rauten $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$, wobei gilt: $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n} = 2$ LE und $y_{\mathrm{C}_n} > y_{\mathrm{A}_n}$.
Zeichnen Sie die Rauten $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ für $x = 3$ und $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ für $x = 6$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Werte von x es Rauten $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ gibt.
Geben Sie das Intervall für x an.

Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}(x) = \left(-0,5x^2 + 5,5x - 9\right)$ LE.
Berechnen Sie sodann das Maß φ des Winkels $\mathrm{D_2C_2B_2}$ und die Seitenlänge $\overline{\mathrm{A_2B_2}}$ der Raute $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$.

Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Begründen Sie rechnerisch, dass der Flächeninhalt A der Rauten $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ stets kleiner als 7 FE ist.

Lösung

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-2|19)$ und $Q(4|-5)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = 0,5x^2 + b\,x + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g besitzt die Gleichung $y = 0,5x - 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c, dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,5x^2 - 5x + 7$ besitzt.
Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g für $x \in [0; 10]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $0 \le x \le 10$; $-6 \le y \le 8$

Lösung zu Aufgabe B1.1

Funktionsgleichung ermitteln

Gegeben: $P(-2|19)$ und $Q(4|-5)$ sowie $p : y = 0,5x^2 + b\,x + c$

Erläuterung: *Gleichungssystem aufstellen*

Die Punkte $P(-2|19)$ und $Q(4|-5)$ werden in die Parabelgleichung $p : y = 0,5x^2 + b\,x + c$ eingesetzt.

Man erhält ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten b und c.

(I) $\quad 19 = 0,5 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$

(II) $\quad -5 = 0,5 \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$

(I) $\quad 19 = 2 - 2b + c$

(II) $\quad -5 = 8 + 4b + c$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Additionsverfahren*

Gleichung (II) wird von Gleichung (I) subtrahiert, so dass die Variable c wegfällt.

(I)-(II) $24 = -6 - 6b \quad | \quad +6$

(I)-(II) $30 = -6b \quad | \quad : (-6)$

$\Rightarrow \quad b = -5$

Erläuterung: *Einsetzen*

$b = -5$ wird in Gleichung (I) $\quad 19 = 2 - 2b + c$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach c aufgelöst.

$19 = 2 - 2 \cdot (-5) + c$

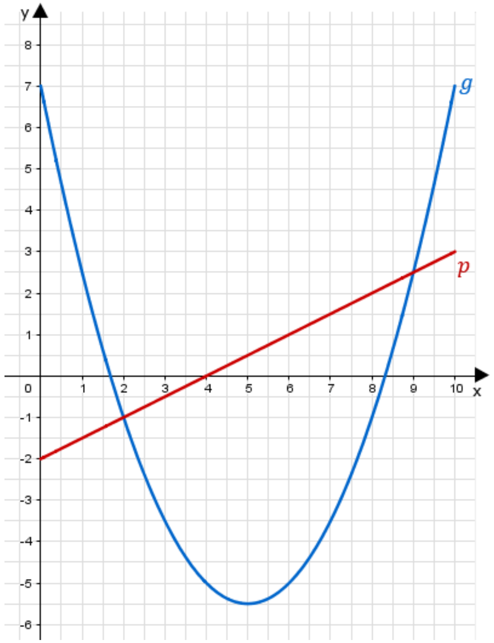
$19 = 12 + c \quad | \quad -12$

$\Rightarrow \quad c = 7$

$\Rightarrow \quad p : y = 0,5x^2 - 5x + 7$

Skizze

Einzeichnen der Parabel $p : y = 0,5x^2 - 5x + 7$ und der Geraden $g : y = 0,5x - 2$:



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen der Geraden g:

- Umwandeln der Steigung $m_g = 0,5$ in einen Bruch $m_g = \frac{1}{2}$.
- Einzeichnen des y- Achsenabschnittes $t = -2$ auf der y-Achse.
- Antragen der Steigung $m_g = \frac{1}{2}$ ausgehend vom y- Achsenabschnitt:

1) 2 Einheiten parallel zur x-Achse nach rechts gehen
2) 1 Einheit parallel zur y-Achse nach oben gehen
3) Punkt setzen

- Gerade durch den y- Achsenabschnitt und den ermittelten Punkt legen.

Einzeichnen der Parabel:

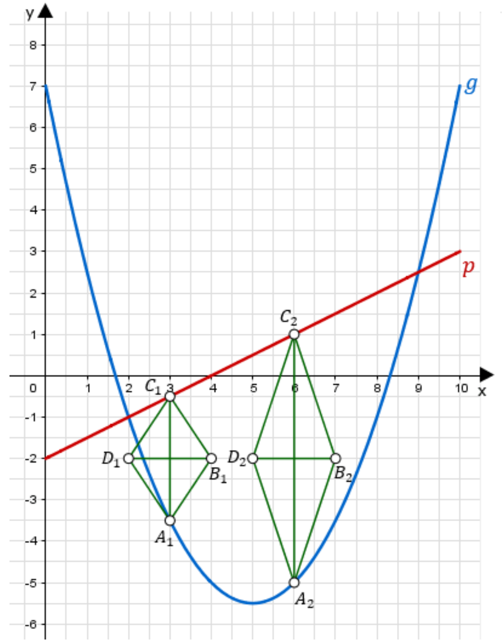
- Ermittlung des Scheitelpunktes: $S\left(\frac{-b}{2a}|y_S\right) \quad \Rightarrow \quad S\,(5|-5,5)$
- Einzeichnen des Scheitelpunktes.
- Berechnung weitere Funktionswerte mithilfe des Taschenrechners oder Leitpunkte bestimmen $\left(\Delta\, y = m \cdot (\Delta\, x)^2\right)$
- Antragen der berechneten Punkte und verbinden zu Parabel.

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n\ \left(x|0,5x^2 - 5x + 7\right)$ auf der Parabel p und Punkte $C_n\ (x|0,5x - 2)$ auf der Gerade g besitzen dieselbe Abszisse x. Diese Punkte bilden zusammen mit Punkten B_n und D_n Rauten $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$, wobei gilt: $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n} = 2$ LE und $y_{\mathrm{C}_n} > y_{\mathrm{A}_n}$.
Zeichnen Sie die Rauten $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$ für $x = 3$ und $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$ für $x = 6$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.2

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen der Raute $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x = 3$:

1) Antragen des Punktes A_1, indem man auf der x-Achse zu $x = 3$ geht und dann nach unten, bis man auf den Graphen der Parabel p stößt.

2) Antragen des Punktes C_1, indem man auf der x-Achse zu $x = 3$ geht und dann nach oben, bis man auf den Graphen der Geraden g stößt.

3) Antragen des Punktes B_1, indem man den Mittelpunkt der Strecke $[A_1\,C_1]$ sucht und dann 1 LE parallel zur x-Achse nach rechts geht.

4) Antragen des Punktes D_1, indem man man von Mittelpunkt der Strecke $[A_1\,C_1]$ 1 LE parallel zur x-Achse nach links geht.

6) Verbinden der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 zur Raute.

Zum Einzeichnen der Raute $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x = 6$ geht man analog vor.

Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Werte von x es Rauten $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ gibt.
Geben Sie das Intervall für x an.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Schnittpunkt zweier Funktionen

$p : y = 0,5x^2 - 5x + 7$
$g : y = 0,5x - 2$

Erläuterung: *Erläuterung*

Rauten $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ kann es nicht geben, wenn die Punkte A_n und B_n gleiche Koordinaten haben. Das ist der Fall, wenn sich die Parabel und die Gerade schneiden.

Man sucht zunächst nach den Schnittpunkten.

Schnittpunkte bestimmen:

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Schema für das Bestimmen der x-Koordinate der Schnittpunkte zweier Funktionen:

1. Funktionsgleichungen gleich setzen.

2. Gleichung nach x auflösen.

$0,5x^2 - 5x + 7 = 0,5x - 2 \qquad | -0,5x + 2$

$0,5x^2 - 5,5x + 9 = 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung kannst du, unter anderem, mit der Mitternachtsformel bestimmen.

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5,5) \pm \sqrt{(-5,5)^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 9}}{2 \cdot 0,5} = 5,5 \pm \sqrt{12,25}$$

$$x_1 = 5,5 - \sqrt{12,25} = 2 \qquad \text{und} \qquad x_2 = 5,5 + \sqrt{12,25} = 9$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Laut Konstruktion gilt $y_{\mathrm{C}_n} > y_{\mathrm{A}_n}$, d.h. Punkte C_n liegen immer oberhalb von Punkten A_n. Dies ist nur dann der Fall, wenn $x \in]2; 9[$.

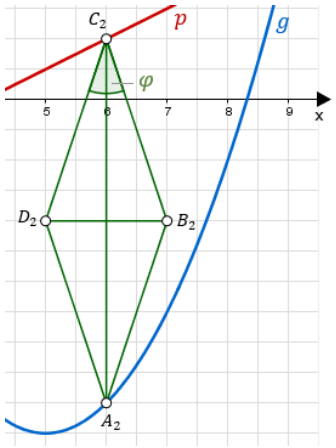
Für $x \in]2; 9[$ gibt es Rauten $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$.

Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}(x) = \left(-0,5x^2 + 5,5x - 9\right)$ LE.
Berechnen Sie sodann das Maß φ des Winkels $\mathrm{D}_2\mathrm{C}_2\mathrm{B}_2$ und die Seitenlänge $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}$ der Raute $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Länge einer Strecke



Gegeben: $A_n\ \left(x|0,5x^2-5x+7\right)$ und $C_n\ (x|0,5x-2)$

Gesucht: $\overline{A_nC_n}(x)$

Erläuterung: *Senkrechte Strecken*

Da die Strecken $[A_nC_n]$ parallel zur y-Achse verlaufen, kann $\overline{A_nC_n}$ berechnet werden, indem $y_{\text{oben}} - y_{\text{unten}}$ berechnet wird.

Es gilt also: $\overline{A_nC_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$

$\overline{A_n\,C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$

$\overline{A_nC_n} = 0,5x - 2 - \left(0,5x^2 - 5x + 7\right)$

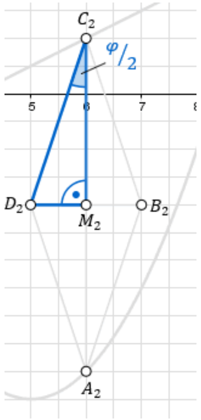
$\overline{A_nC_n} = 0,5x - 2 - 0,5x^2 + 5x - 7$

$\overline{A_nC_n} = -0,5x^2 + 5,5x - 9$

$\Rightarrow \quad \overline{A_nC_n}(x) = \left(-0,5x^2 + 5,5x - 9\right)$ LE

Winkel bestimmen

Man betrachte das rechtwinklige Dreieck $\triangle D_2M_2C_2$, wobei M_2 der Mittelpunkt der Strecke $[D_2B_2]$ ist.



Erläuterung: *Erläuterung*

Per Konstruktion ist $\overline{B_2D_2} = 2$ und somit $\overline{D_2M_2} = 2 : 2 = 1$.

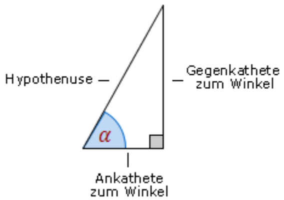
$\overline{D_2M_2} = 1$

Erläuterung: *Erläuterung*

Für $\overline{A_2C_2}$ wird $\overline{A_nC_n}(6)$ berechnet.

$\overline{C_2M_2} = \dfrac{1}{2} \cdot \overline{A_2C_2} = \dfrac{1}{2}\left(-0,5 \cdot 6^2 + 5,5 \cdot 6 - 9\right) = 3$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ aus $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{1}{3}$ → SHIFT → tan

$$\frac{\varphi}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18,43° \qquad |\cdot 2$$

$$\varphi = 36,86°$$

Länge einer Strecke

$$\overline{A_2B_2} = \overline{C_2D_2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} = 3,16 \text{ (LE)}$$

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

Da die Seiten einer Raute alle gleich lang sind, gilt: $\overline{A_2B_2} = \overline{C_2D_2}$.

Für die Länge $\overline{C_2D_2}$ wird im Dreieck $D_2M_2C_2$ der Satz des Pythagoras angewendet:

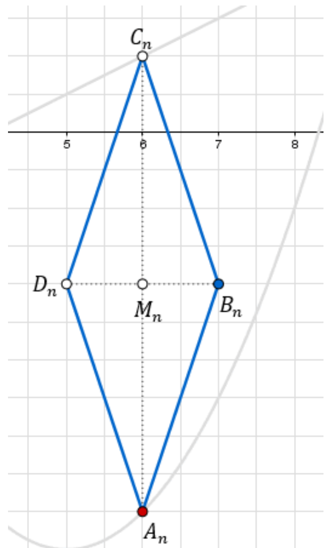
In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2+b^2=c^2$

Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Koordinaten von Punkten ermitteln



Gegeben: $A_n\left(x|0,5x^2-5x+7\right)$; $C_n(x|0,5x-2)$

Gesucht: $B_n\ (x_{B_n}|y_{B_n})$

Erläuterung: *Erläuterung*

Für die Punkte B_n und D_n gilt nach Konstruktion: $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}=2$.
Sie liegen Punkte B_n von der x-Koordinate der Punkte A_n aus 1 Einheiten nach rechts.

$x_{B_n}=x_{A_n}+1=x+1 \qquad \Rightarrow \qquad B_n\ (x+1|...)$

Erläuterung: *Lage des Punktes*

Punkte B_n liegen auf der gleichen Höhe wie die Mittelpunkte M_n der Strecke $[A_n\,C_n]$.

$y_{B_n}=y_{M_n}$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt einer Strecke $[A\,B]$ mit den Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ berechnet sich mit der Formel $M_{[A\,B]}=\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\Big|\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

$$y_{B_n}=\frac{y_{A_n}+y_{C_n}}{2}$$

$$y_{B_n}=\frac{0,5x^2-5x+7+0,5x-2}{2}=\frac{0,5x^2-4,5x+5}{2}=0,25x^2-2,25x+2,5$$

$$\Rightarrow \qquad B_n\ \left(x+1|0,25x^2-2,25x+2,5\right)$$

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

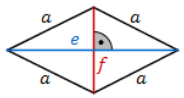
Begründen Sie rechnerisch, dass der Flächeninhalt A der Rauten $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ stets kleiner als 7 FE ist.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Flächeninhalt einer Raute

Gegeben: $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}(x)=\left(-0,5x^2+5,5x-9\right)$ LE ; $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}=2$ LE

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$A=\dfrac{1}{2}\cdot e\cdot f$

$$A(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}\cdot\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}=\frac{1}{2}\cdot\left(-0,5x^2+5,5x-9\right)\cdot 2=\left(-0,5x^2+5,5x-9\right)\ \text{FE}$$

Extremwertaufgabe

x-Koordinate des Scheitelpunktes der Funktion $A(x)$ bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Flächeninhalt der Raute $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ ist für verschiedene x unterschiedlich groß.

Für einen bestimmten x-Wert ist der Flächeninhalt $A(x)=\left(-0,5x^2+5,5x-9\right)$ FE am größten (maximal).

Die Funktion $y=-0,5x^2+5,5x-9$ ist eine quadratische Funktion. Ihr Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel. Den größte Funktionswert hat sie in ihrem Scheitelpunkt.

$x_{\max}=x_S$ von $A(x)$

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Die Koordinaten des Scheitelpunktes $S(x_S|y_S)$ einer Funktion der Form $y = a\,x^2 + b\,x + x$ sind gegeben durch:

$$S\left(\frac{-b}{2a}|c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$x_{\max} = \frac{-5,5}{2\cdot(-0,5)} = 5,5$$

Maximalen Flächeninhalt bestimmen:

$$A_{\max} = A(5,5) = 6,125\text{ FE} < 7\text{ FE}$$