Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = -2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = -0,5$ sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_2 die Gleichung $y = \log_{0,5} x - 0,75$ mit $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ hat.

Aufgabe B1.2 (4 Punkte)

Zeichnen Sie die Graphen zu f_1 und f_2 für $x \in [0,5; 11]$ in ein Koordinatensystem.
Berechnen Sie sodann die Nullstelle der Funktion f_1.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leq x \leq 12$; $-5 \leq y \leq 6$

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n\ \big(x \big| -2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5\big)$ auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x wie Punkte $B_n\ \big(x \big| \log_{0,5} x - 0,75\big)$ auf dem Graphen zu f_2. Sie sind für $x > 1,19$ zusammen mit Punkten C_n Eckpunkte von Dreiecken $A_n B_n C_n$.
Es gilt: $\overrightarrow{A_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1,5 \end{pmatrix}$.
Zeichnen Sie das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ für $x = 2$ und das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ für $x = 7$ in das Koordinatensystem zu B 1.2 ein.

Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Das Dreieck $A_3 B_3 C_3$ ist gleichschenklig mit der Basis $[A_3 B_3]$.
Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinate des Punktes A_3.

Aufgabe B1.5 (5 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Schwerpunkte S_n der Dreiecke $A_n B_n C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und geben Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte S_n an.
Zeichnen Sie sodann die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ in das Koordinatensystem zu B 1.2 ein.

Lösung

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f_1 mit der Gleichung $y = -2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
Der Graph der Funktion f_1 wird durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab $k = -0,5$ sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ auf den Graphen der Funktion f_2 abgebildet.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_2 die Gleichung $y = \log_{0,5} x - 0,75$ mit $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ hat.

Lösung zu Aufgabe B1.1

Orthogonale Affinität

Gegeben: $f_1 : y = -2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5$

Zu zeigen: $f_2 : y = \log_{0,5} x - 0,75$

Erläuterung: *Orthogonale Affinität*

Wird der Graph einer Funktion f durch orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab k auf den Graphen einer Funktion f' abgebildet, so gilt:

$y' = k \cdot y$

In Matrixform: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$y' = k \cdot y$

$y' = -0,5 \cdot \big(-2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5\big) \quad |$ Klammer auflösen (ausmultiplizieren)

$y' = \log_{0,5} x + 0,75$

Verschiebung um einen Vektor

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \log_{0,5} x + 0,75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \log_{0,5} x - 0,75 \end{pmatrix}$$
$x'' = x$

Erläuterung: *Erläuterung*

Anstelle von y'' wird y geschrieben, da $x = x''$

$y = \log_{0,5} x - 0,75$

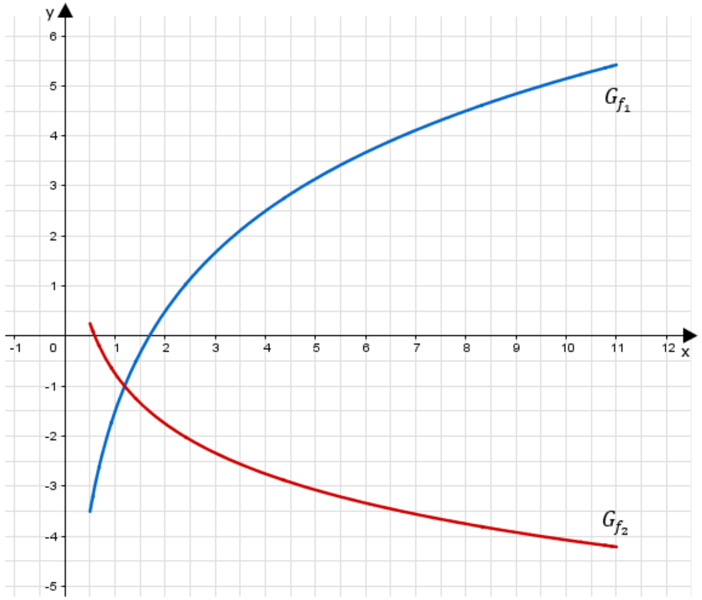
$\Rightarrow f_2 : y = \log_{0,5} x - 0,75$

Aufgabe B1.2 (4 Punkte)

Zeichnen Sie die Graphen zu f_1 und f_2 für $x \in [0,5; 11]$ in ein Koordinatensystem.
Berechnen Sie sodann die Nullstelle der Funktion f_1.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-1 \leq x \leq 12$; $-5 \leq y \leq 6$

Lösung zu Aufgabe B1.2

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

Um die Funktion f_1 und f_2 einzeichnen zu können, lässt man sich mit dem GTR jeweils eine Wertetabelle von $x \in [0,5; 11]$ erstellen.

Nullstellen einer Funktion

$0 = -2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \quad | + 1,5$

$1,5 = -2 \cdot \log_{0,5} x \quad | : (-2)$

$-0,75 = \log_{0,5} x \quad | 0,5^{()}$

$x = 0,5^{-0,75}$

$x = 1,68$

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

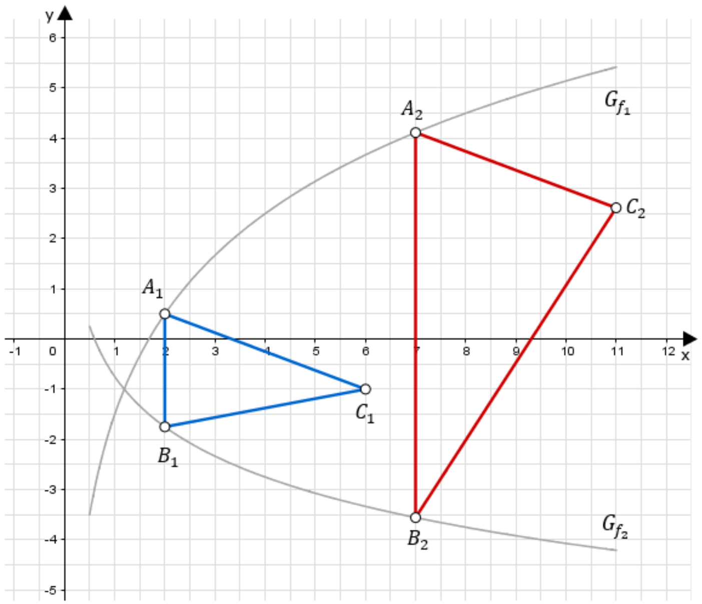
Punkte $A_n\ \big(x|-2\cdot\log_{0,5}x-1,5\big)$ auf dem Graphen zu f_1 haben dieselbe Abszisse x wie Punkte $B_n\ \big(x|\log_{0,5}x-0,75\big)$ auf dem Graphen zu f_2. Sie sind für $x>1,19$ zusammen mit Punkten C_n Eckpunkte von Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$.

Es gilt: $\overrightarrow{A_n\,C_n}=\begin{pmatrix}4\\-1,5\end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie das Dreieck $A_1\,B_1\,C_1$ für $x=2$ und das Dreieck $A_2\,B_2\,C_2$ für $x=7$ in das Koordinatensystem zu B 1.2 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen des Dreiecks $A_1\,B_1\,C_1$:

- Antragen des Punktes A_1 indem man auf der x-Achse zu $x=2$ und anschließend nach oben geht, bis man auf den Graphen der Funktion f_1 stößt.

- Antragen des Punktes B_1 indem man auf der x-Achse zu $x=2$ und anschließend nach unten geht, bis man auf den Graphen der Funktion f_2 stößt.

- Antragen des Punktes C_1 indem man vom Punkt A_1 aus den Vektor $\overrightarrow{A_n\,C_n}=\begin{pmatrix}4\\-1,5\end{pmatrix}$ geht.

- Verbinden der Punkte A_1, B_1 und C_1 zum Dreieck $A_1\,B_1\,C_1$.

Zum Einzeichnen des Dreiecks $A_2\,B_2\,C_2$ wird analog vorgegangen.

Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Das Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$ ist gleichschenklig mit der Basis $[A_3\,B_3]$.
Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinate des Punktes A_3.

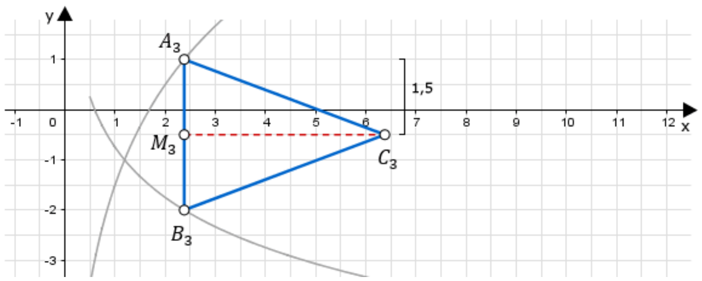
Lösung zu Aufgabe B1.4

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A_n\ \big(x|-2\cdot\log_{0,5}x-1,5\big)$ und $B_n\ \big(x|\log_{0,5}x-0,75\big)$

Gesucht: Koordinaten des Punktes A_3

Erläuterung: *Erläuterung*



$\overline{A_3\,M_3} = 1,5$ LE, da die Höhe im gleichschenkligen Dreieck auch Seitenhalbierende ist und der Vektor $\overrightarrow{A_n\,C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ beträgt.

Da also $\overline{A_3\,M_3} = 1,5$ LE gilt: $\overline{A_3\,B_3} = 3$ LE

Mit Hilfe von $\overline{A_3\,B_3} = 3$ LE und $\overline{A_n\,B_n}$ kann x_{A_3} berechnet werden:

$\overline{A_n\,B_n} = y_{A_n} - y_{B_n}$

$\overline{A_n\,B_n} = \left(-2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5\right) - \left(\log_{0,5} x - 0,75\right)$

$\overline{A_n\,B_n} = -2 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 - \log_{0,5} x + 0,75$

$\overline{A_n\,B_n} = -3 \cdot \log_{0,5} x - 0,75$

somit gilt:

$\overline{A_3\,B_3} = \overline{A_n\,B_n}$

$3 = -3 \cdot \log_{0,5} x - 0,75 \;|{+0,75}$

$3,75 = -3 \cdot \log_{0,5} x |: (-3)$

$-1,25 = \log_{0,5} x| \quad 0,5^{()}$

$0,5^{-1,25} = x$

$2,38 = x$

Aufgabe B1.5 (5 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Schwerpunkte S_n der Dreiecke $A_n\,B_n\,C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und geben Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte S_n an.
Zeichnen Sie sodann die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Dreiecke $A_1\,B_1\,C_1$ und $A_2\,B_2\,C_2$ in das Koordinatensystem zu B 1.2 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Schwerpunkt eines Dreiecks

Gegeben: $A_n\ \left(x| -2\log_{0,5} x - 1,5\right)$ und $B_n\ \left(x|\log_{0,5} x - 0,75\right)$

Gesucht: Schwerpunkt des Dreiecks $A_n\,B_n\,C_n$

Erläuterung: *Schwerpunkt eines Dreiecks*

Für den Schwerpunkt eines Dreiecks gilt die Formel:

$$S\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} | \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Berechnung des Punktes C_n mit Hilfe des Vektors $\overrightarrow{A_n\,C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1,5 \end{pmatrix}$.

Einsetzen der Punkte A_n, B_n und C_n in die Formel zur Berechnung des Schwerpunktes:

$$S\left(\frac{x + x + x + 4}{3} | \frac{-2\log_{0,5} x - 1,5 + \log_{0,5} x - 0,75 + -2\log_{0,5} x - 3}{3}\right)$$

$$S\left(\frac{3x + 4}{3} | \frac{-3\log_{0,5} x - 5,25}{3}\right)$$

$$S\left(x + \frac{3}{4} | \log_{0,5} x - 1,75\right)$$

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

$x' = x + \frac{4}{3} \quad | - \frac{4}{3}$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die x-Koordinate $x + \frac{4}{3}$ von S wird nach x aufgelöst.
Anschließend wird der Term in die y-Koordinate von S eingesetzt.

$x' - \frac{4}{3} = x$

x eingesetzt in $y' = log_{0,5}\, x - 1,75$:

$y' = log_{0,5}(x' - \frac{4}{3}) - 1,75$

$\Rightarrow \quad y = log_{0,5}(x - \frac{4}{3}) - 1,75$

Skizze

Für $x_1 = 2$ in $S\left(x + \frac{3}{4} | \log_{0,5} x - 1,75\right)$ ergibt sich $S_1\ (3,33 | -0,75)$
und für $x_2 = 4$ ergibt sich $S_2\ (8,33 | -1,06)$.