Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die Punkte $A(-2|2)$ und $C(3|3)$ sind für $x < 8$ gemeinsame Eckpunkte von Vierecken $A\,B_n\,C\,D_n$.
Die Eckpunkte $B_n(x|0,5x)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 0,5x$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Diagonalen $[A\,C]$.
Für die Diagonalen $[B_n\,D_n]$ gilt: $M \in [B_n\,D_n]$ und $\overrightarrow{B_n\,D_n} = 3,5 \cdot \overrightarrow{B_n\,M}$.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g und das Viereck $A\,B_1\,C\,D_1$ für $x = 0,5$ sowie die Diagonalen $[A\,C]$ und $[B_1\,D_1]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 5$; $-2 \leq y \leq 10$

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n.
[Ergebnis : $D_n(-2,5x + 1,75| - 1,25x + 8,75)$]

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte D_n.

Aufgabe B2.4 (5 Punkte)

Unter den Vierecken $A\,B_n\,C\,D_n$ gibt es das Drachenviereck $A\,B_2\,C\,D_2$.
Zeigen Sie rechnerisch, dass für die x-Koordinate des Punktes B_2 gilt: $x = 0,91$.
Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Drachenvierecks $A\,B_2\,C\,D_2$.

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Der Punkt C' entsteht durch Achsenspiegelung des Punktes C an der Geraden g.
Für das Viereck $A\,B_3\,C\,D_3$ gilt: $B_3 \in [A\,C']$.
Berechnen Sie die Koordinaten von C' und zeichnen Sie sodann das Viereck $A\,B_3\,C\,D_3$ in das Koordinatensystem zu B 2.1 ein.

Aufgabe B2.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass für die Flächeninhalte der Dreiecke $A\,M\,D_n$ und $M\,B_n\,C$ gilt:
$A_{A\,M\,D_n} : A_{M\,B_n\,C} = 2,5 : 1$.

Lösung

Aufgabe B2.

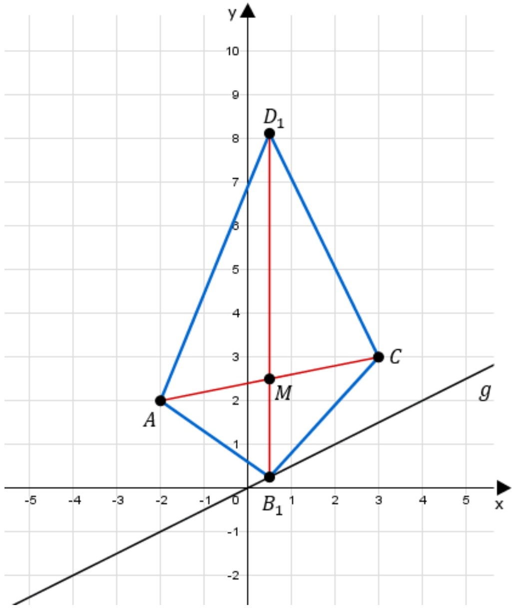
Die Punkte $A(-2|2)$ und $C(3|3)$ sind für $x < 8$ gemeinsame Eckpunkte von Vierecken $A\,B_n\,C\,D_n$.
Die Eckpunkte $B_n(x|0,5x)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 0,5x$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).
Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Diagonalen $[A\,C]$.
Für die Diagonalen $[B_n\,D_n]$ gilt: $M \in [B_n\,D_n]$ und $\overrightarrow{B_n\,D_n} = 3,5 \cdot \overrightarrow{B_n\,M}$.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g und das Viereck $A\,B_1\,C\,D_1$ für $x = 0,5$ sowie die Diagonalen $[A\,C]$ und $[B_1\,D_1]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 5$; $-2 \leq y \leq 10$

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

- Antragen der Punkte A und C sowie der Strecke $[AC]$.
- Einzeichnen des Mittelpunktes M der Strecke $[AC]$.
- Antragen der Ursprungsgeraden g mit Steigung $m_g = 0,5$.
- Einzeichnen des Punktes B_1 bei $x_1 = 0,5$ auf der Geraden g.
- Messen des Abstandes der Punkte B_1 und M. Anschließend wird der Abstand mit $3,5$ multipliziert und vom Punkt B_1 aus angetragen, um den Punkt D_1 zu erhalten.
- Einzeichnen des Vierecks $A B_1 C D_1$.

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n.
[Ergebnis : $D_n(-2,5x + 1,75| - 1,25x + 8,75)$]

Lösung zu Aufgabe B2.2

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A(-2|2)$ $C(3|3)$

Gesucht: M

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt einer Strecke $[AB]$ mit den Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ berechnet sich mit der Formel $M_{[AB]}\left(\frac{x_A + x_B}{2}|\frac{y_A + y_B}{2}\right)$

$$M\left(\frac{-2+3}{2}|\frac{2+3}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{1}{2}|\frac{5}{2}\right)$$
$$\Rightarrow M\ (0,5|2,5)$$

Ermittlung des Vektors $\overrightarrow{BM}$:

Erläuterung: *Spitze minus Fuß*

Die Berechnung eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ mit den Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ erfolgt nach der Technik „Spitze minus Fuß“ :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 0,5 - x \\ 2,5 - 0,5x \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{B_n D_n} = 3,5 \cdot \overrightarrow{B_n M}$$
$$\overrightarrow{B_n D_n} = 3,5 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 - x \\ 2,5 - 0,5x \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{B_n D_n} = \begin{pmatrix} 1,75 - 3,5x \\ 8,75 - 1,75x \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{D_n} = \overrightarrow{B_n} + \overrightarrow{B_n D_n}$$

Erläuterung: *Vektoraddition*

Um den Ortsvektor $\overrightarrow{D_n}$ des Punktes D_n zu berechnen nimmt man den Ortsvektor $\overrightarrow{B_n}$ des Punktes B_n und addiert ihn mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{B_n D_n}$.

$$\overrightarrow{D_n} = \begin{pmatrix} x \\ 0,5x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,75-3,5x \\ 8,75-1,75x \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{D_n} = \begin{pmatrix} 1,75-2,5x \\ 8,75-1,25x \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow D_n\ (-2,5x+1,75| -1,25+8,75)$$

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte D_n.

Lösung zu Aufgabe B2.3

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

$x' = -2,5x + 1,75 \qquad | +2,5x$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die x-Koordinate $x + \frac{4}{3}$ von D_n wird nach x aufgelöst.
Anschließend wird der Term in die y-Koordinate von S eingesetzt.

$x' + 2,5x = 1,75 \qquad | -x'$

$2,5x = 1,75 - x' \qquad | : 2,5$

$x = \dfrac{1,75-x'}{2,5}$

x eingesetzt in $y' = -1,25x + 8,75$

$y' = -1,25 \cdot \left(\dfrac{1,75-x'}{2,5}\right) + 8,75$

$y' = -0,88 - 0,5x' + 8,75$

$y' = -0,5x' + 7,88$

$\Rightarrow \quad y = -0,5x + 7,88$

Aufgabe B2.4 (5 Punkte)

Unter den Vierecken $A\,B_n\,C\,D_n$ gibt es das Drachenviereck $A\,B_2\,C\,D_2$.
Zeigen Sie rechnerisch, dass für die x-Koordinate des Punktes B_2 gilt: $x = 0,91$.
Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Drachenvierecks $A\,B_2\,C\,D_2$.

Lösung zu Aufgabe B2.4

Flächeninhalt eines Drachenvierecks

Gegeben: $A(-2|2)$, $B_n(x|0,5x)$, $C(3|3)$, $D_n(-2,5x+1,75|-1,25x+8,75)$

Gesucht: $\overrightarrow{A\,C}$ und $\overrightarrow{B_n\,D_n}$

$$\overrightarrow{A\,C} = \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 3-2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{A\,C} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{B_n\,D_n} = \begin{pmatrix} (-2,5x+1,75)-x \\ (-1,25x+8,75)-0,5x \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{B_n\,D_n} = \begin{pmatrix} -3,5x+1,75 \\ -1,75x+8,75 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{A\,C} \circ \overrightarrow{B_n\,D_n} = 0$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Im Drachenviereck $A\,B_n\,C\,D_n$ stehen die Diagonalen $[A\,C]$ und $[B_n\,D_n]$ senkrecht aufeinander.

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3,5x+1,75 \\ -1,75x+8,75 \end{pmatrix} = 0$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wird wie folgt dargestellt:

$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

$5 \cdot (-3,5x+1,75) + (-1,75x+8,75) = 0$

$-17,5x + 8,75 - 1,75x + 8,75 = 0$

$-19,25x + 17,5 = 0 \qquad | -17,5$

$-19,25x = -17,5 \qquad | : -19,25$

$x = 0,91$

Länge eines Vektors

Gegeben: $\overrightarrow{A\,C} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und für $x_2 = 0,91$ in
$\overrightarrow{B_n\,D_n} = \begin{pmatrix} -3,5x+1,75 \\ -1,75x+8,75 \end{pmatrix}$ egbit sich: $\overrightarrow{B_2\,D_2} = \begin{pmatrix} -3,5 \cdot (0,91) + 1,75 \\ -1,75 \cdot (0,91) + 8,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,435 \\ 7,1575 \end{pmatrix}$
Gesucht: $|\overrightarrow{A\,C}|$ und $|\overrightarrow{B_2\,D_2}|$ um den Flächeninhalt $A_{A\,B_2\,C\,D_2}$ zu berechnen.

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge eines Vektors $\overrightarrow{v}$ mit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird mit der folgenden Formel berechnet:

$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|\overrightarrow{A\,C}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$|\overrightarrow{B_2\,D_2}| = \sqrt{(-1,435)^2 + (7,1575)^2} = 7,3$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Drachenvierecks*

Ein Drachenviereck mit den Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

$A_{A\,B_2\,C\,D_2} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{A\,C}| \cdot |\overrightarrow{B_2\,D_2}|$

$A_{A\,B_2\,C\,D_2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot 7,3$

$A_{A\,B_2\,C\,D_2} = 18,61$ FE

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Der Punkt C' entsteht durch Achsenspiegelung des Punktes C an der Geraden g.
Für das Viereck $A\,B_3\,C\,D_3$ gilt: $B_3 \in [A\,C']$.
Berechnen Sie die Koordinaten von C' und zeichnen Sie sodann das Viereck $A\,B_3\,C\,D_3$ in das Koordinatensystem zu B 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B2.5

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $g : y = 0,5x$ und $C(3|3)$

Gesucht: Koordinaten des Punktes C'

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Für den Winkel α, den eine Gerade $g : y = m\,x + t$ mit der x-Achse einschließt, gilt:

$m = \tan \alpha$

$\tan \alpha = 0,5$

Erläuterung: *Erläuterung*

Weil man später für die Spiegelungsmatrix den doppelten Winkel benötigt, berechnen wir hier gleich 2α.

Um den Winkel 2α aus $\tan\alpha = 0,5$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $0,5 \rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan$\rightarrow \cdot 2$

$\Rightarrow 2\alpha = 53,13°$

Erläuterung: *Spiegelung*

Ist α der Winkel, den die Spiegelungsgerade mit der x-Achse einschließt, so lautet die entsprechende Spiegelungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 53,13° & \sin 53,13° \\ \sin 53,13° & -\cos 53,13° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

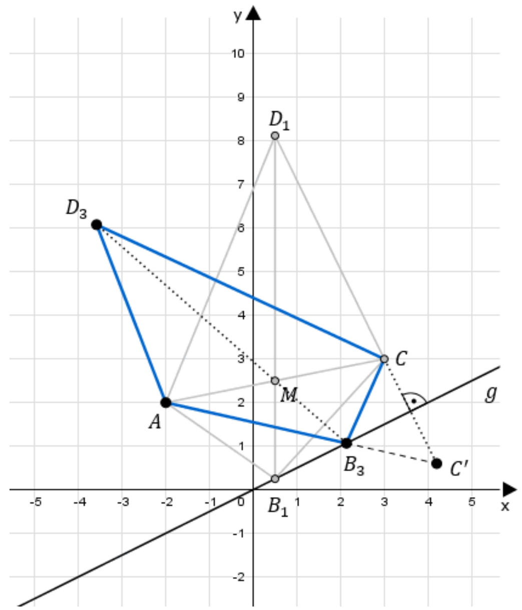
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos 53,13° + 3 \cdot \sin 53,13° \\ 3 \cdot \sin 53,13° - 3 \cdot \cos 53,13° \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,2 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad C'(4,2|0,6)$

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

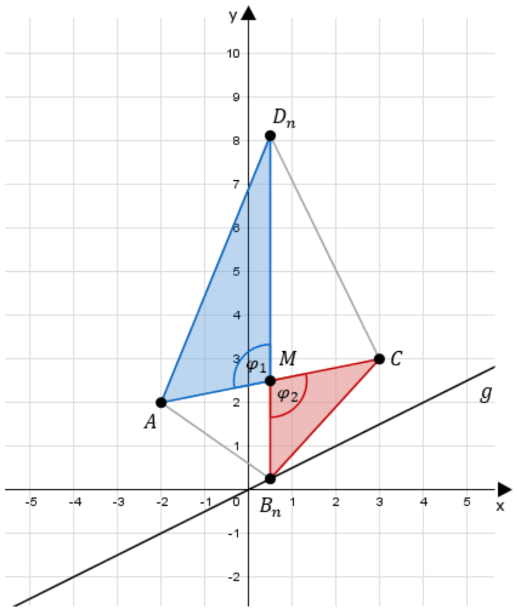
- Antragen des Spiegelpunktes C'.
- Einzeichnen der Strecke $[A\,C']$.
- Der Schnittpunkt der Strecke $[A\,C']$ mit der Geraden g ergibt den Punkt B_3.
- Messen des Abstandes der Punkte B_3 und M. Anschließend wird der Abstand mit $3,5$ multipliziert und vom Punkt B aus angetragen.

Aufgabe B2.6 (2 Punkte)

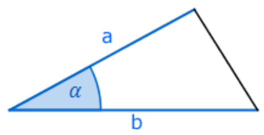
Begründen Sie, dass für die Flächeninhalte der Dreiecke $A\,M\,D_n$ und $M\,B_n\,C$ gilt: $A_{A\,M\,D_n} : A_{M\,B_n\,C} = 2,5 : 1$.

[Lösung zu Aufgabe B2.6]

2-dimensionale Geometrie



Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

Da $A_{AMD_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MD_n} \cdot \sin\varphi_1$ mit $\varphi_1 = \measuredangle D_n M A$ und

$A_{MB_nC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{MB_n} \cdot \sin\varphi_2$ mit $\varphi_2 = \measuredangle B_n M C$ gilt:

$$\frac{A_{AMD_n}}{A_{MB_nC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MD_n} \cdot \sin\varphi_1}{\frac{1}{2} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{MB_n} \cdot \sin\varphi_2}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

$\frac{1}{2}$ kann aus dem Nenner und dem Zähler des Verhältnisses gestrichen werden.

$$\frac{A_{AMD_n}}{A_{MB_nC}} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{MD_n} \cdot \sin\varphi_1}{\overline{MC} \cdot \overline{MB_n} \cdot \sin\varphi_2}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

$\sin\varphi_1$ und $\sin\varphi_2$ können gekürzt werden, da φ_1 und φ_2 Scheitelwinkel sind und somit $\varphi_1 = \varphi_2$ gilt.

$$\frac{A_{AMD_n}}{A_{MB_nC}} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{MD_n}}{\overline{MC} \cdot \overline{MB_n}}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da der Punkt M der Mittelpunkt der Strecke $[AC]$ ist, gilt: $\overline{AM} = \overline{MC}$

Somit können die Streckenlängen $\overline{AM}$ und $\overline{MC}$ ebenfalls aus dem Verhältnis gekürzt werden.

$$\frac{A_{AMD_n}}{A_{MB_nC}} = \frac{\overline{MD_n}}{\overline{MB_n}}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da für die Diagonalen $[B_n D_n]$ $\overrightarrow{B_n D_n} = 3,5 \cdot \overrightarrow{B_n M}$ gilt, ist $\overline{MD_n} = 2,5 \cdot \overline{MB_n}$.

$$\frac{A_{AMD_n}}{A_{MB_nC}} = \frac{2,5}{1}$$